

Άσκηση 1 : Δίνεται το LTI σύστημα $y[n] = T\{x[n]\}$ που ορίζεται από την αναδρομική σχέση:

$$y[n] = 2x[n] - 3x[n-1] + x[n-2] \quad (1)$$

1. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος $H(z)$

$$(1) \Rightarrow y[n] = 2x[n] - 3x[n-1] + x[n-2] \xrightarrow{ZT} Y(z) = 2X(z) - 3z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z)$$

$$\Rightarrow Y(z) = X(z)(2 - 3z^{-1} + z^{-2}) \xrightarrow{H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}} H(z) = 2 - 3z^{-1} + z^{-2}$$

2. Να βρεθεί η κρουστική απόκριση του συστήματος $h[n]$

Η κρουστική απόκριση υπολογίζεται από τον αντίστροφο Μ/Σ Ζ της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$:

$$h[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

3. Να βρεθεί η έξοδος y που δίνει το σύστημα για είσοδο $x = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ -1 \ -1]$

Η έξοδος του συστήματος υπολογίζεται ως η συνέλιξη της κρουστικής του απόκρισης με την είσοδο.

$$h[n] = 2\delta[n] - 3\delta[n-1] + \delta[n-2] \xrightarrow{\text{από τον ορισμό της } \delta[n]} h = [2 \ -3 \ 1], \text{ με } L_h=0$$

Εκτελώντας τη συνέλιξη με την μέθοδο του πίνακα έχουμε:

		1	1	0	0	-1	-1
2	2	2	0	0	-2	-2	
-3	-3	-3	0	0	3	3	
1	1	1	0	0	-1	-1	-1

Στη συνέχεια αθροίζουμε τα διαγώνια στοιχεία και έχουμε:

$$y = [2 \ -1 \ -2 \ 1 \ -2 \ 1 \ 2 \ -1]$$

$$\text{με } L_y = L_x + L_h = 0 + 0 = 0$$

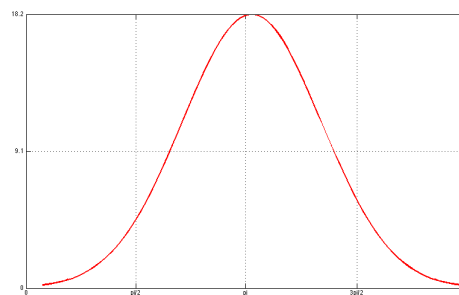
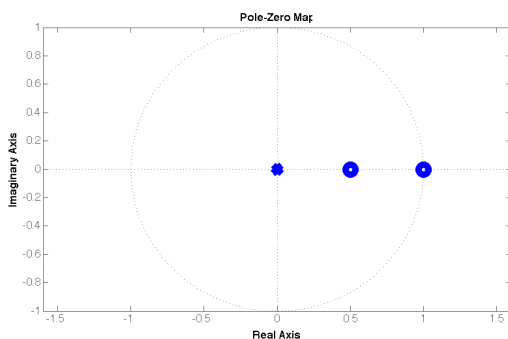
4. Να σχεδιαστεί το διάγραμμα πόλων-μηδενικών και από αυτό να σχεδιαστεί κατά προσέγγιση η κανονικοποιημένη μορφή του διαγράμματος πλάτους

Για την εύρεση των πόλων μηδενικών του οποίου εργαζόμαστε ως εξής, ξεκινώντας από τη συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = 2 - 3z^{-1} + z^{-2} = \frac{z^2}{z^2} (2 - 3z^{-1} + z^{-2}) = \frac{2z^2 - 3z + 1}{z^2}$$

Προφανώς υπάρχει διπλός πόλος στο μηδέν (0) ενώ τα μηδενικά βρίσκονται από τις ρίζες του αριθμητή:

$$\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \left\{ \begin{matrix} 1/2 \\ 1 \end{matrix} \right.$$



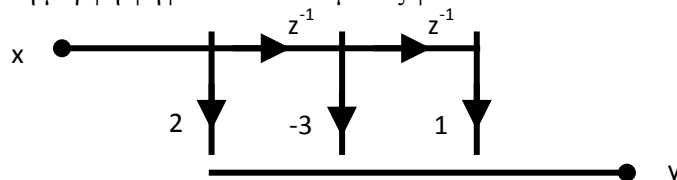
Διάγραμμα πόλων-μηδενικών και κανονικοποιημένη μορφή διαγράμματος πλάτους

5. Να χαρακτηριστεί ως φίλτρο το σύστημα και να σχολιαστεί η ευστάθειά του

Το σύστημα είναι ένα FIR υψηλερατό φίλτρο και είναι ευσταθές ως FIR φίλτρο.

6. Να σχεδιαστεί το ψηφιακό δικτύωμα που υλοποιεί το σύστημα

Μια απλή υλοποίηση υπό τη μορφή ψηφιακού δικτύωματος φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:



Άσκηση 2 : Δίνεται το LTI σύστημα $y[n] = T\{x[n]\}$ που ορίζεται από την αναδρομική σχέση:

$$2y[n] = 2x[n] - 3x[n-1] - 2x[n-2] \quad (2)$$

1. Είναι αιτιατό το σύστημα;

Το σύστημα είναι αιτιατό αφού η έξοδος εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από παρελθοντικές ή παροντικές τιμές της εισόδου.

2. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος

Από το μετασχηματισμό Z της κρουστικής απόκρισης προκύπτει η συνάρτηση μεταφοράς:

$$(1) \Rightarrow y[n] = x[n] - \frac{3}{2}x[n-1] - x[n-2] \xrightarrow{ZT} Y(z) = X(z) - \frac{3}{2}z^{-1}X(z) - z^{-2}X(z)$$

$$\Rightarrow Y(z) = X(z) \left(1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}\right) \xrightarrow{H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}} H(z) = 1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}$$

3. Να βρεθεί η κρουστική απόκριση του συστήματος

Η κρουστική απόκριση αποτελεί τον αντίστροφο M/Σ Z της συνάρτησης μεταφοράς:

$$h[n] = \delta[n] - \frac{3}{2}\delta[n-1] - \delta[n-2]$$

4. Να βρεθεί η έξοδος y που δίνει το σύστημα για είσοδο $x = [-1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]$

Για την εκτίμηση της εξόδου μπορούμε να πραγματοποιήσουμε συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης του συστήματος με την είσοδο ($y=h*x$).

$$h[n] = \delta[n] - \frac{3}{2}\delta[n-1] - \delta[n-2] \xrightarrow{\text{λόγω του ορισμού της } \delta[n]} h = \left[1 \quad -\frac{3}{2} \quad -1\right], \text{ προφανώς με } L_h=0$$

Εκτελώντας τη συνέλιξη με την μέθοδο του πίνακα έχουμε:

		-1	-1	0	0	0	1	1	
1		-1	1	0	0	0	1	1	
-3/2		3/2	3/2	0	0	0	-3/2	-3/2	
-1		1	1	0	0	0	-1	-1	

Στη συνέχεια αθροίζουμε τα διαγώνια στοιχεία και έχουμε:

$$y = \left[-1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{5}{2} \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{5}{2} \quad -1\right], \text{ με } L_y=L_x+L_h=0+0=0$$

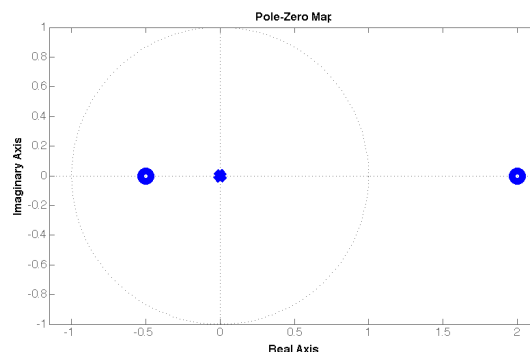
5. Να σχεδιαστεί το διάγραμμα πόλων-μηδενικών

Για την εύρεση των πόλων μηδενικών του οποίου εργαζόμαστε ως εξής, ξεκινώντας από τη συνάρτηση μεταφοράς:

$$H(z) = 1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2} = \frac{z^2}{z^2} \left(1 - \frac{3}{2}z^{-1} - z^{-2}\right) = \frac{z^2 - 3z - 2}{z^2}$$

Προφανώς υπάρχει διπλός πόλος στο μηδέν (0) ενώ τα μηδενικά βρίσκονται από τις ρίζες του αριθμητή:

$$\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = \left\{ -\frac{1}{2} \right.$$



Διάγραμμα πόλων-μηδενικών

6. Να σχολιαστεί η ευστάθεια του συστήματος

Εφόσον το σύστημα είναι FIR είναι ευσταθές.