

Άσκηση 1 : Δίνεται το LTI σύστημα $y[n] = T\{x[n]\}$ που ορίζεται από την αναδρομική σχέση:

$$y[n] = y[n-1] + x[n] - 2x[n-1] + x[n-2] \quad (1)$$

1. Να βρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος $H(z)$.

$$(1) \Rightarrow y[n] - y[n-1] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$$

$$\xrightarrow{ZT} Y(z) - z^{-1}Y(z) = X(z) - 2z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z)$$

$$\Rightarrow Y(z)(1 - z^{-1}) = X(z)(1 - 2z^{-1} + z^{-2}) \xrightarrow{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}} H(z) = \frac{(1 - 2z^{-1} + z^{-2})}{(1 - z^{-1})}$$

Εφόσον η μεγαλύτερη κατ' απόλυτη τιμή δύναμη του αριθμητή είναι 2, είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη του παρονομαστή και συνεπώς απαιτείται διαίρεση των πολυωνύμων. Από τη διαίρεση προκύπτει εύκολα ότι: $H(z) = 1 - z^{-1}$

2. Να βρεθεί η έξοδος y που δίνει το σύστημα για είσοδο $x = [2 \ 1 \ 0 \ 3 \ -1 \ -2]$.

Η έξοδος του συστήματος υπολογίζεται ως η συνέλιξη της κρουστικής του απόκρισης με την είσοδο. Έτσι αρχικά εκτιμάται η κρουστική απόκριση από τον αντίστροφο Μ/Σ Ζ της συνάρτησης μεταφοράς $H(z)$. Στην περίπτωση αυτή είναι απλά:

$$h[n] = \delta[n] - \delta[n-1] \xrightarrow{\text{από τον ορισμό της } \delta[n]} h = [1 \ -1]$$

Εκτελώντας τη συνέλιξη με την μέθοδο του πίνακα έχουμε:

	2	1	0	3	-1	-2
1	2	1	0	3	-1	-2
-1	-2	-1	0	-3	1	2

Στη συνέχεια αθροίζουμε τα διαγώνια στοιχεία και έχουμε:

$$y = [2 \ -1 \ -1 \ 3 \ -4 \ -1 \ 2]$$

με $L_y = L_x + L_h = 0 + 0 = 0$

3. Να βρεθεί η απόκριση συχνότητας του συστήματος $H(e^{j\omega})$.

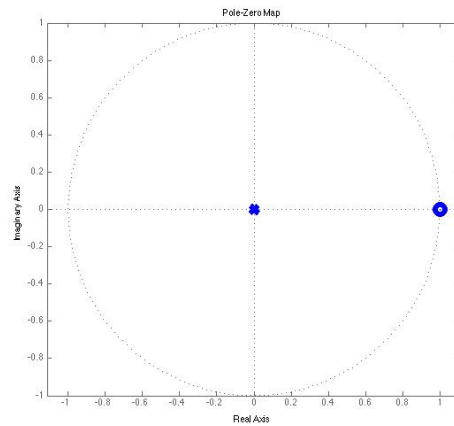
Εκμεταλλευόμενοι το ότι $H(e^{j\omega}) = H(z)|_{z=e^{j\omega}} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = 1 - e^{-j\omega}$

4. Να σχεδιαστεί το διάγραμμα πόλων-μηδενικών και από αυτό να σχεδιαστεί κατά προσέγγιση η κανονικοποιημένη μορφή του διαγράμματος πλάτους.

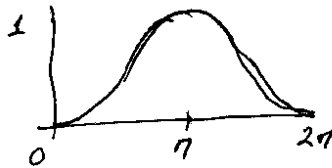
Εφόσον η συνάρτηση μεταφοράς είναι: $H(z) = 1 - z^{-1}$ μπορεί να γραφεί: $H(z) = 1 - \frac{1}{z}$

Συνεπώς, η συνάρτηση μεταφοράς δεν μπορεί να οριστεί για $z=0$ ενώ μηδενίζεται όταν $z=1$.

Εύκολα προκύπτει το διάγραμμα πόλων-μηδενικών ως εξής:



Από το διάγραμμα μπορεί επίσης να προσεγγίσει το κανονικοποιημένο διάγραμμα πλάτους της απόκρισης συχνότητας ως εξής:

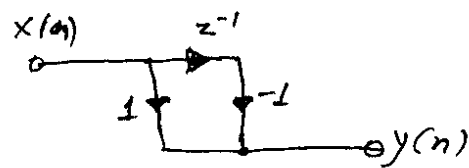


5. Να χαρακτηριστεί ως φίλτρο (και IIR/FIR) το σύστημα.

Το σύστημα είναι ένα FIR υπερπαρατό φίλτρο.

6. Να σχεδιαστεί το ψηφιακό δικτύωμα που υλοποιεί το σύστημα.

Μια απλή υλοποίηση του συστήματος ως ψηφιακό δίκτυωμα φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



Άσκηση 2 : Δίνεται το σύστημα $y[n] = T\{x[n]\}$ που ορίζεται από την αναδρομική σχέση:

$$3y[n] = x[n] - 2x[n-1] - x[n-2] \quad (2)$$

1. Να ελεγχθεί αν το σύστημα είναι αιτιατό.

Το σύστημα είναι αιτιατό αφού η έξοδος εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από παρελθοντικές ή παροντικές τιμές της εισόδου.

2. Να ελεγχθεί αν το σύστημα είναι γραμμικό και αμετάβλητο στη μετατόπιση (LSI).

Αρχικά μετασχηματίζουμε τη (2) ως εξής:

$$y[n] = \frac{1}{3}x[n] - \frac{2}{3}x[n-1] - \frac{1}{3}x[n-2] \quad (3)$$

Το σύστημα ελέγχεται ως προς την ιδιότητα της υπέρθεσης και της ομογένειας για την απόδειξη της γραμμικότητας.

(α) Υπέρθεση: $T\{x_1[n] + x_2[n]\} = \frac{1}{3}(x_1[n] + x_2[n]) - \frac{2}{3}(x_1[n-1] + x_2[n-1]) - \frac{1}{3}(x_1[n-2] + x_2[n-2]) = \frac{1}{3}x_1[n] - \frac{2}{3}x_1[n-1] - \frac{1}{3}x_1[n-2] + \frac{1}{3}x_2[n] - \frac{2}{3}x_2[n-1] - \frac{1}{3}x_2[n-2] = T\{x_1(n)\} + T\{x_2(n)\}$ άρα ισχύει η ιδιότητα της υπέρθεσης

(β) Ομογένεια: $T\{c \cdot x[n]\} = \frac{1}{3}c \cdot x[n] - \frac{2}{3}c \cdot x[n-1] - \frac{1}{3}c \cdot x[n-2] = c \cdot T\{x[n]\}$ άρα ισχύει η ιδιότητα της ομογένειας

Εφόσον ισχύουν και οι δύο ιδιότητες το σύστημα είναι γραμμικό

(γ) Εξέταση της αμεταβλητότητας στη μετατόπιση:

Για μετατόπιση n_0 , η μετατοπισμένη έξοδος είναι:

$$y[n - n_0] = \frac{1}{3}x[n - n_0] - \frac{2}{3}x[n - n_0 - 1] - \frac{1}{3}x[n - n_0 - 2]$$

Αν αντίστοιχη η μετατοπισμένη είσοδος είναι η $x_{n_0}[n] = x[n - n_0]$, τότε η έξοδος του συστήματος σε αυτή την είσοδο είναι:

$$T\{x_{n_0}[n]\} = \frac{1}{3}x_{n_0}[n] - \frac{2}{3}x_{n_0}[n-1] - \frac{1}{3}x_{n_0}[n-2]$$

$$\xrightarrow{x_{n_0}[n]=x[n-n_0]} T\{x_{n_0}[n]\} = \frac{1}{3}x[n - n_0] - \frac{2}{3}x[n - n_0 - 1] - \frac{1}{3}x[n - n_0 - 2] = y[n - n_0]$$

και συνεπώς το σύστημα είναι αμετάβλητο στη μετατόπιση.

Συνολικά το σύστημα είναι LSI.

3. Να βρεθεί η έξοδος y που δίνει το σύστημα για είσοδο $x = [-1 \ 0 \ 1 \ 2 \ 1 \ 0 \ -1]$.

Για την εκτίμηση της εξόδου μπορούμε να πραγματοποιήσουμε συνέλιξη της κρουστικής απόκρισης του συστήματος με την είσοδο ($y=h*x$). Η κρουστική απόκριση του συστήματος υπολογίζεται αν στην αναδρομική σχέση του συστήματος (3) αντικαταστήσουμε την είσοδο με την κρουστική ακολουθία $\delta[n]$:

$$h[n] = \frac{1}{3}\delta[n] - \frac{2}{3}\delta[n-1] - \frac{1}{3}\delta[n-2] \xrightarrow{\text{λόγω του ορισμού της } \delta[n]} h = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

προφανώς με $L_h=0$.

Εκτελώντας τη συνέλιξη με την μέθοδο του πίνακα έχουμε:

	-1	0	1	2	1	0	-1
1/3	-1/3	0	1/3	2/3	1/3	0	-1/3
-2/3	2/3	0	-2/3	-4/3	-2/3	0	2/3
-1/3	1/3	0	-1/3	-2/3	-1/3	0	1/3

Στη συνέχεια αθροίζουμε τα διαγώνια στοιχεία και έχουμε:

$$y = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

με $L_y=L_x+L_h=0+0=0$

4. Να βρεθεί η κρουστική απόκριση και η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος.

Η κρουστική απόκριση όπως έχει ήδη υπολογιστεί σε προηγούμενο ερώτημα είναι:

$$h[n] = \frac{1}{3}\delta[n] - \frac{2}{3}\delta[n-1] - \frac{1}{3}\delta[n-2]$$

5. Να σχεδιαστεί το διάγραμμα πόλων-μηδενικών.

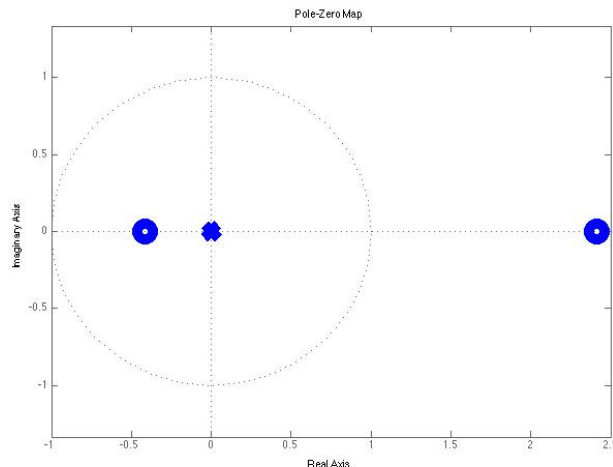
Το σύστημα είναι και πάλι ένα FIR φίλτρο για την εύρεση των πόλων μηδενικών του οποίου εργαζόμαστε ως εξής, ξεκινώντας από τη συνάρτηση μεταφοράς:

Από το μετασχηματισμό Z της κρουστικής απόκρισης έχουμε τη συνάρτηση μεταφοράς, απλά ως:

$$H(z) = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2} = \frac{z^2}{z^2} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}z^{-1} - \frac{1}{3}z^{-2} \right) = \frac{z^2 - 2z - 1}{3z^2}$$

Προφανώς υπάρχει διπλός πόλος στο μηδέν (0) ενώ τα μηδενικά βρίσκονται από τις ρίζες του αριθμητή:

$$\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} = \begin{cases} -0.414 \\ 2.414 \end{cases}$$



6. Να σχολιαστεί η ευστάθεια του συστήματος.

Εφόσον το σύστημα είναι FIR είναι ευσταθές.

7. Να σχεδιαστεί το ψηφιακό δικτύωμα που υλοποιεί το σύστημα.

Μια απλή υλοποίηση υπό τη μορφή ψηφιακού δικτυώματος φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα:

