

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

**Υλοποίηση συστημάτων
Διακριτού Χρόνου**

Σχεδίαση φίλτρων

Αντίστροφος Μετασχηματισμός Z

Αντίστροφος MZ (inverse-ZT)

- Προσεγγίσεις εύρεσης του αντίστροφου MZ
 - Τυπικά ο i-ZT γίνεται με **μιγαδική ολοκλήρωση** που βασίζεται στο θεώρημα ολοκλήρωσης του Cauchy

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz$$

όπου C κλειστή καμπύλη στην ROC της $X(z)$ που περικλείει την αρχή των αξόνων κατά αντιωρολογιακή φορά

- Με εφαρμογή του θεωρήματος των υπολοίπων του Cauchy υπολογίζεται το μιγαδικό ολοκλήρωμα:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(z) z^{n-1} dz = \sum [\text{Υπόλοιπα στους πόλους εσωτερικά της ROC}]$$

$$\text{Υπόλοιπο}[X(z) z^{n-1} \text{ στο } z = a_k] = [(1 - a_k z^{-1}) X(z) z^{n-1}]_{z=a_k}$$

Αντίστροφος MZ (inverse-ZT)

- Άλλες προσεγγίσεις, λιγότερο «τυπικές»
 - Μέθοδος παρατήρησης
 - Ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά
 - Ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

Αντίστροφος MZ (inverse-ZT)

- Μέθοδος παρατήρησης

- Γίνεται χρήση γνωστών ζευγών MZ, όπως:

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{z} \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad |z| > |a|$$

- Για παράδειγμα:

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{4} \quad \rightarrow \quad x[n] = \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

Αντίστροφος MZ (inverse-ZT)

- Μέθοδος αναπτύγματος **δυναμοσειράς**

- Ο MZ είναι μια δυναμοσειρά

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

- Σε ανεπτυγμένη μορφή είναι:

$$X(z) = \dots + x[-2]z^2 + x[-1]z^1 + x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + \dots$$

- Γενικά ο MZ αυτής της μορφής αντιστρέφεται εύκολα
- Είναι ιδιαιτέρως χρήσιμη για σειρές πεπερασμένου μήκους

- Για παράδειγμα:
$$X(z) = z^2 \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right) (1 + z^{-1})(1 - z^{-1})$$
$$= z^2 - \frac{1}{2}z - 1 + \frac{1}{2}z^{-1}$$
$$x[n] = \delta[n+2] - \frac{1}{2}\delta[n+1] - \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$
$$x[n] = \begin{cases} 1 & n = -2 \\ -\frac{1}{2} & n = -1 \\ -1 & n = 0 \\ \frac{1}{2} & n = 1 \\ 0 & n = 2 \end{cases}$$

Αντίστροφος MZ (inverse-ZT)

- Μέθοδος αναπτύγματος **σε μερικά κλάσματα**

- Η γενική μορφή αναπαράστασης ενός MZ είναι:
$$X(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^N a_k z^{-k}}$$
- Εφαρμόζεται ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα:

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^s \frac{C_m}{(1 - d_i z^{-1})^m}$$

- Ο πρώτος όρος υπάρχει μόνο εάν $M > N$
- Ο όρος B_r λαμβάνεται μέσω διαίρεσης
- Ο δεύτερος όρος αναπαριστά όλους τους πόλους πρώτης τάξης
- Ο τρίτος όρος αναπαριστά έναν πόλο τάξης s
 - Θα υπάρχει αντίστοιχος όρος για κάθε πόλο υψηλής τάξης
- Κάθε όρος μπορεί να αντιστραφεί με τη μέθοδο παρατήρησης

Αντίστροφος MZ (inverse-ZT)

- Στο γενικό τύπο του αναπτύγματος

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} + \sum_{m=1}^s \frac{C_m}{(1 - d_i z^{-1})^m}$$

- Οι συντελεστές δίνονται:

$$A_k = \left(1 - d_k z^{-1}\right) X(z) \Big|_{z=d_k}$$

$$C_m = \frac{1}{(s-m)! (-d_i)^{s-m}} \left\{ \frac{d^{s-m}}{dw^{s-m}} \left[(1 - d_i w)^s X(w^{-1}) \right] \right\}_{w=d_i^{-1}}$$

i-ZT με ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

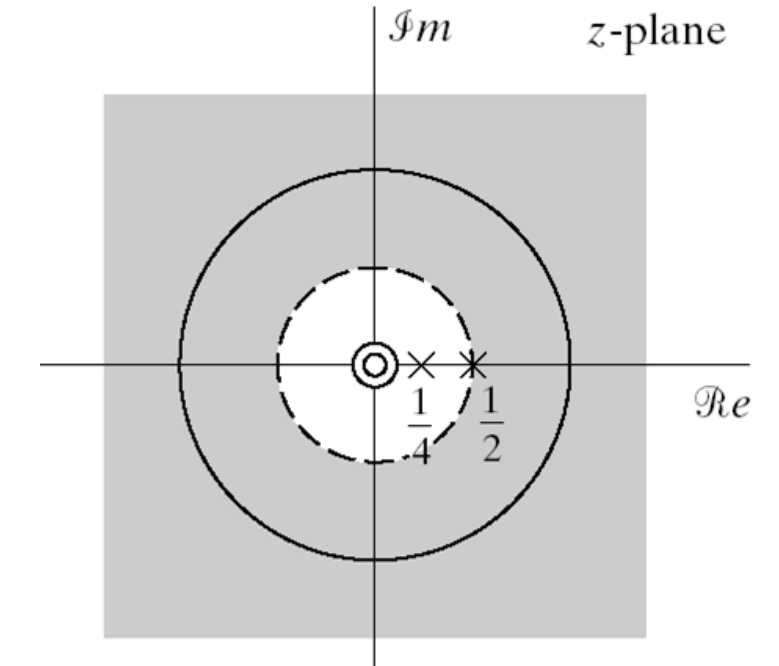
• Παράδειγμα 2^{ης} τάξης

$$X(z) = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \quad \text{ROC: } |z| > \frac{1}{2}$$

$$X(z) = \frac{A_1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} + \frac{A_2}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

$$A_1 = \left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)X(z) \Big|_{z=\frac{1}{4}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}\right)} = -1$$

$$A_2 = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)X(z) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\right)} = 2$$



$$X(z) = \frac{-1}{\left(1 - \frac{1}{4}z^{-1}\right)} + \frac{2}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Σύστημα αιτιατό
(δεξιάς πλευράς)

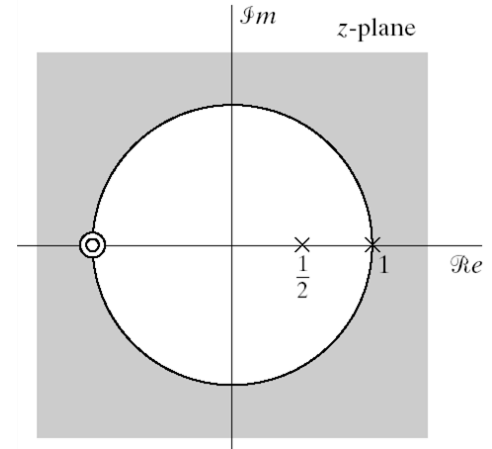
$$x[n] = 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

i-ZT με ανάπτυγμα σε μερικά κλάσματα

• Παράδειγμα με χρήση διαίρεσης

Παράδειγμα για τάξη αριθμητή $\geq$ τάξη παρονομαστή

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{(1 + z^{-1})^2}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})} \quad |z| > 1$$



• Λόγω τάξης αριθμ. απαιτείται διαίρεση:

$$\frac{\frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1}{-(z^{-2} - 3z^{-1} + 2)} \Rightarrow X(z) = 2 + \frac{-1 + 5z^{-1}}{\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)(1 - z^{-1})}$$

• Μέθοδος των υπολοίπων:

$$A_1 = \left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)X(z) \Big|_{z=\frac{1}{2}} = -9$$

$$A_2 = (1 - z^{-1})X(z) \Big|_{z=1} = 8$$

$$X(z) = 2 + \frac{A_1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A_2}{1 - z^{-1}}$$

$$X(z) = 2 - \frac{9}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{8}{1 - z^{-1}} \quad |z| > 1$$

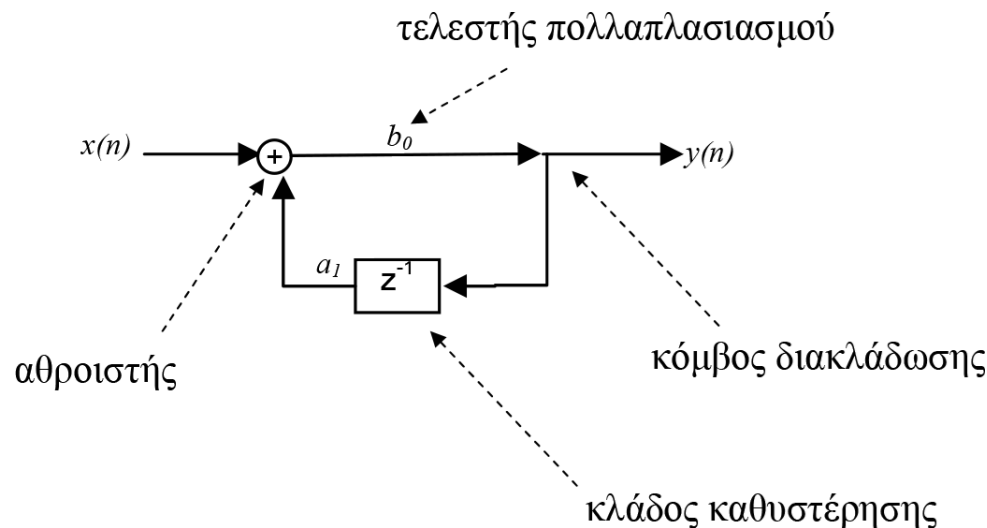
$$x[n] = 2\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - 8u[n]$$

Υλοποίηση συστημάτων διακριτού χρόνου

Ψηφιακά δικτυώματα

- Διαγραμματικός τρόπος περιγραφής συστημάτων διακριτού χρόνου
 - Ψηφιακά δικτυώματα
 - Γραφήματα με δομικά στοιχεία κλάδους και κόμβους
 - Βοηθούν στην κυκλωματική υλοποίηση συστημάτων
 - Βοηθούν στην ανάλυση συστημάτων

$$y[n] = a_1 \cdot y[n - 1] + b_0 \cdot x[n]$$



Συστήματα FIR

- Γενικά για ένα LSI σύστημα που περιγράφεται από την αναδρομική σχέση:

$$\sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \alpha_{\lambda} \cdot y(n - \lambda) = \sum_{k=0}^K \beta_k \cdot x(n - k)$$

- Όταν η έξοδος προκύπτει ως ένας γραμμικός συνδυασμός των τιμών της εισόδου τότε αναφερόμαστε σε Συστήματα **Πεπερασμένης Κρουστικής Απόκρισης** (πεπερασμένη διάρκεια) ή **Finite Impulse Response (FIR)**

$$y(n) = \sum_{k=0}^K \beta_k \cdot x(n - k)$$

- π.χ. moving average: $y(n) = \frac{1}{3} [x(n + 1) + x(n) + x(n - 1)]$

Περιγραφή FIR συστημάτων

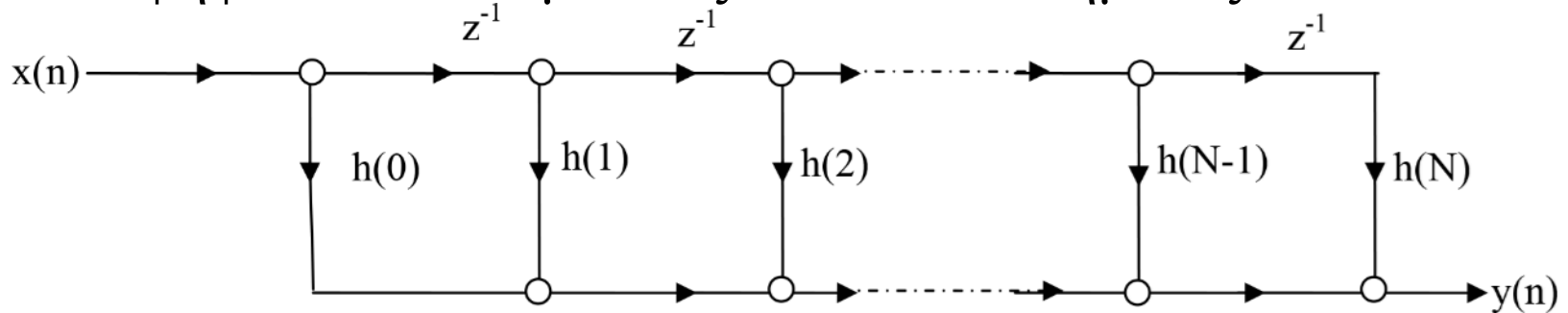
- Για ένα FIR σύστημα
 - Για $h(n)$ κρουστική απόκριση $y(n)$ έξοδο FIR συστήματος

$$y(n) = \sum_{k=0}^N h(k) \cdot x(n - k)$$

- Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από τη σχέση:

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h(n) \cdot z^{-n}$$

- Το ψηφιακό δικτύωμα ενός τέτοιου συστήματος είναι:



- Ο τρόπος αυτός αλγεβρικής και διαγραμματικής περιγραφής του συστήματος λέγεται **ευθεία μορφή**

Περιγραφή FIR συστημάτων

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

- Το σύστημα $y(n)=2\cdot x(n)+4\cdot x(n-1)+3\cdot x(n-2)+x(n-3)$

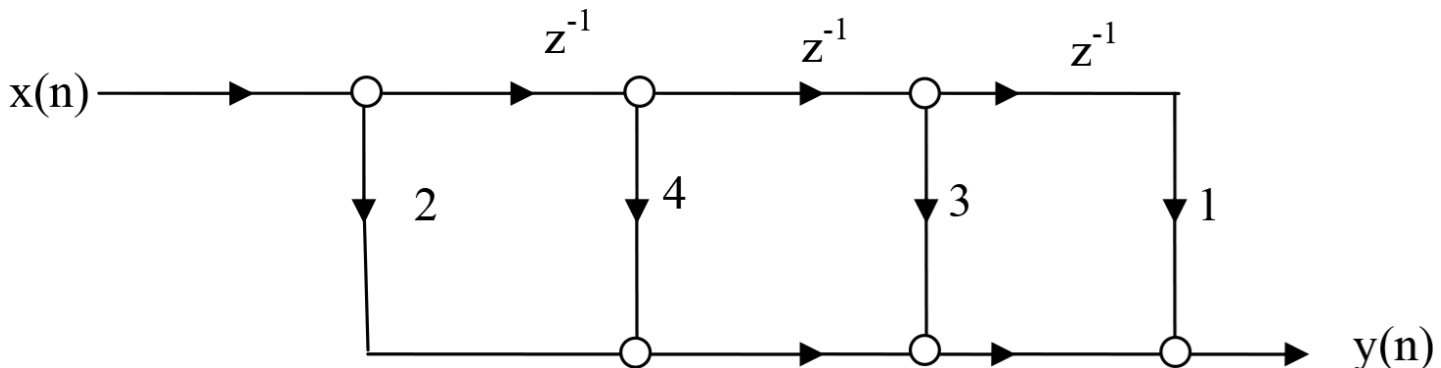
- με κρουστική απόκριση

$$h(n)=2\cdot\delta(n)+4\cdot\delta(n-1)+3\cdot\delta(n-2)+\delta(n-3)$$

- και συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z)=2+4\cdot z^{-1}+3\cdot z^{-2}+z^{-3}$$

- υλοποιείται διαγραμματικά ως εξής:



Περιγραφή FIR συστημάτων

- Εκτός από την *ευθεία μορφή* ένα FIR σύστημα μπορεί να περιγραφεί με *σύνδεση σε σειρά απλούστερων (μικρότερης τάξης) FIR συστημάτων*
 - Με παραγοντοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς και εκμετάλλευση της συνελικτικής και προσεταιριστικής ιδιότητας του μετασχηματισμού Z
- Ο τρόπος αυτός περιγραφής του συστήματος λέγεται *μορφή καταρράκτη*

Περιγραφή FIR συστημάτων

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

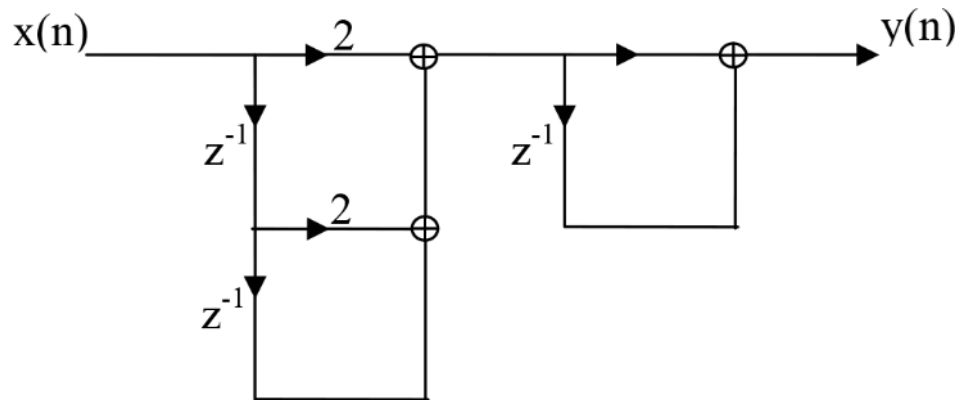
- Έστω το σύστημα $y(n)=2\cdot x(n)+4\cdot x(n-1)+3\cdot x(n-2)+x(n-3)$ με συνάρτηση μεταφοράς $H(z)=2+4\cdot z^{-1}+3\cdot z^{-2}+z^{-3}$

- Με παραγοντοποίηση της $H(z)$ προκύπτει

$$H(z)=2+4\cdot z^{-1}+3\cdot z^{-2}+z^{-3}=(2+2\cdot z^{-1}+z^{-2})\cdot(1+z^{-1})$$

$$H(z)=H_1(z)\cdot H_2(z)\Leftrightarrow h(n)=h_1(n)*h_2(n)$$

- Άρα το σύστημα αποτελείται από **δύο συστήματα συνδεδεμένα σε σειρά**



Συστήματα IIR

- Γενικά για ένα LSI σύστημα που περιγράφεται από την αναδρομική σχέση:

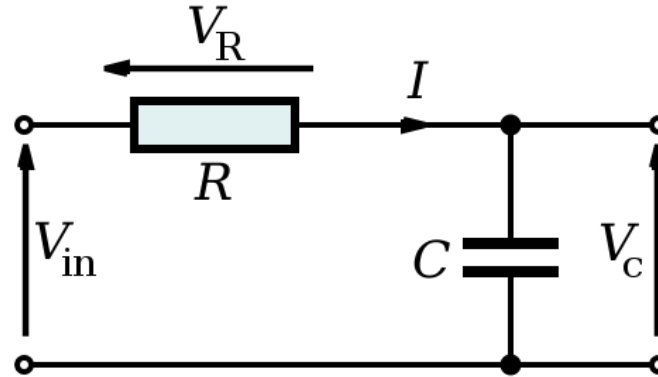
$$\sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \alpha_{\lambda} \cdot y(n - \lambda) = \sum_{k=0}^K \beta_k \cdot x(n - k)$$

- Όταν η έξοδος προκύπτει ως ένας γραμμικός συνδυασμός των τιμών της εισόδου και της εξόδου τότε αναφερόμαστε σε Συστήματα **Άπειρης Κρουστικής Απόκρισης** (άπειρη διάρκεια) ή **Infinite Impulse Response (IIR)**

$$y(n) = \sum_{k=0}^K \beta_k \cdot x(n - k) - \sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \alpha_{\lambda} \cdot y(n - \lambda)$$

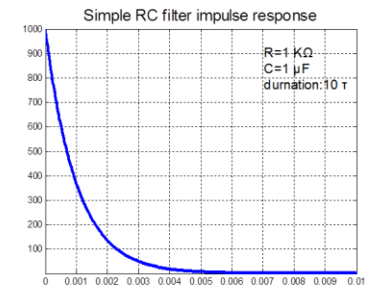
Συστήματα IIR συνεχούς μεταβλητής

- Το απλούστερο αναλογικό φίλτρο IIR είναι αυτό που υλοποιεί το κύκλωμα RC (ομοίως και το RL)



- Το φίλτρο έχει εκθετική κρουστική απόκριση

$$C \frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} = 0 \Rightarrow V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$
$$h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t), \quad H(s) = \frac{V_C}{V_{in}} = \frac{1}{1 + RCs}$$



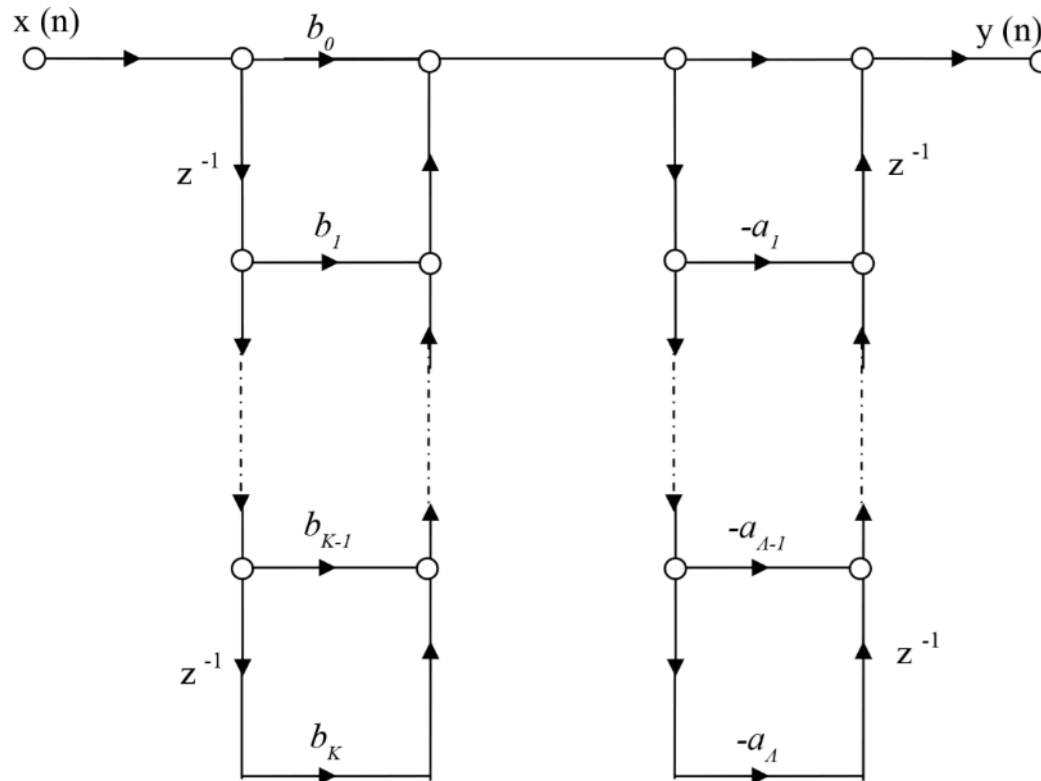
- Εξαιτίας της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της απόκρισης το σύστημα αποκρίνεται χωρίς όρια

Περιγραφή IIR συστημάτων

- Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από τη σχέση

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^K \beta_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \alpha_{\lambda} \cdot z^{-\lambda}}$$

- Διαγραμματική υλοποίηση *ευθείας μορφής τύπου I*

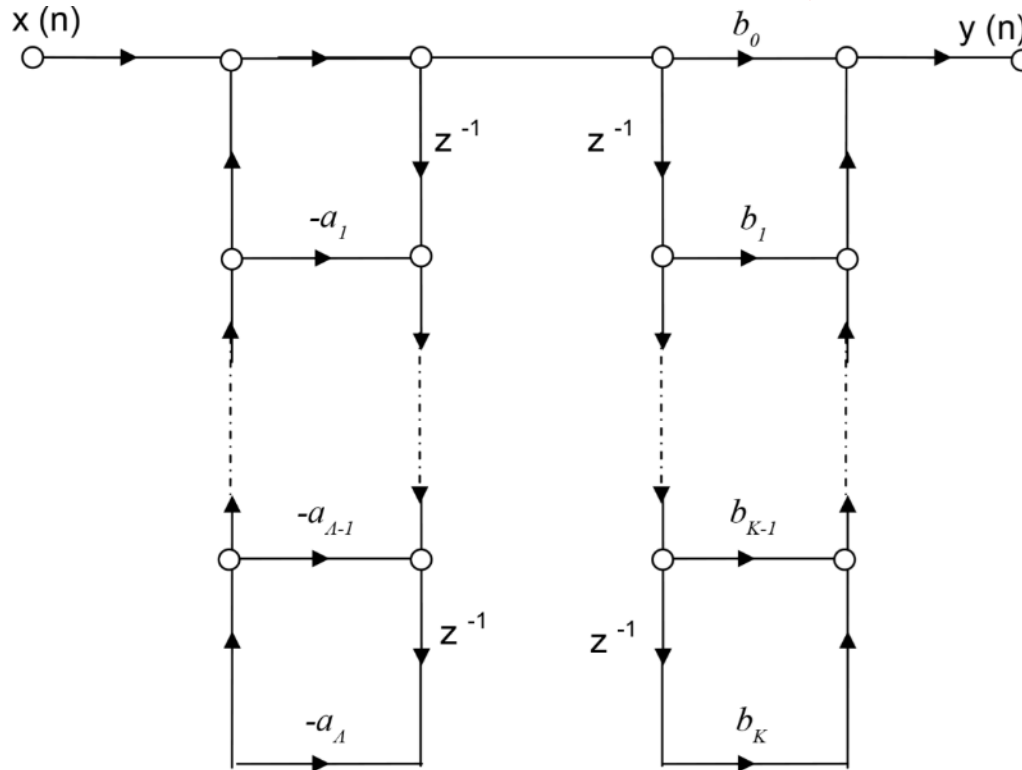


Περιγραφή IIR συστημάτων

- Η συνάρτηση μεταφοράς δίνεται από τη σχέση

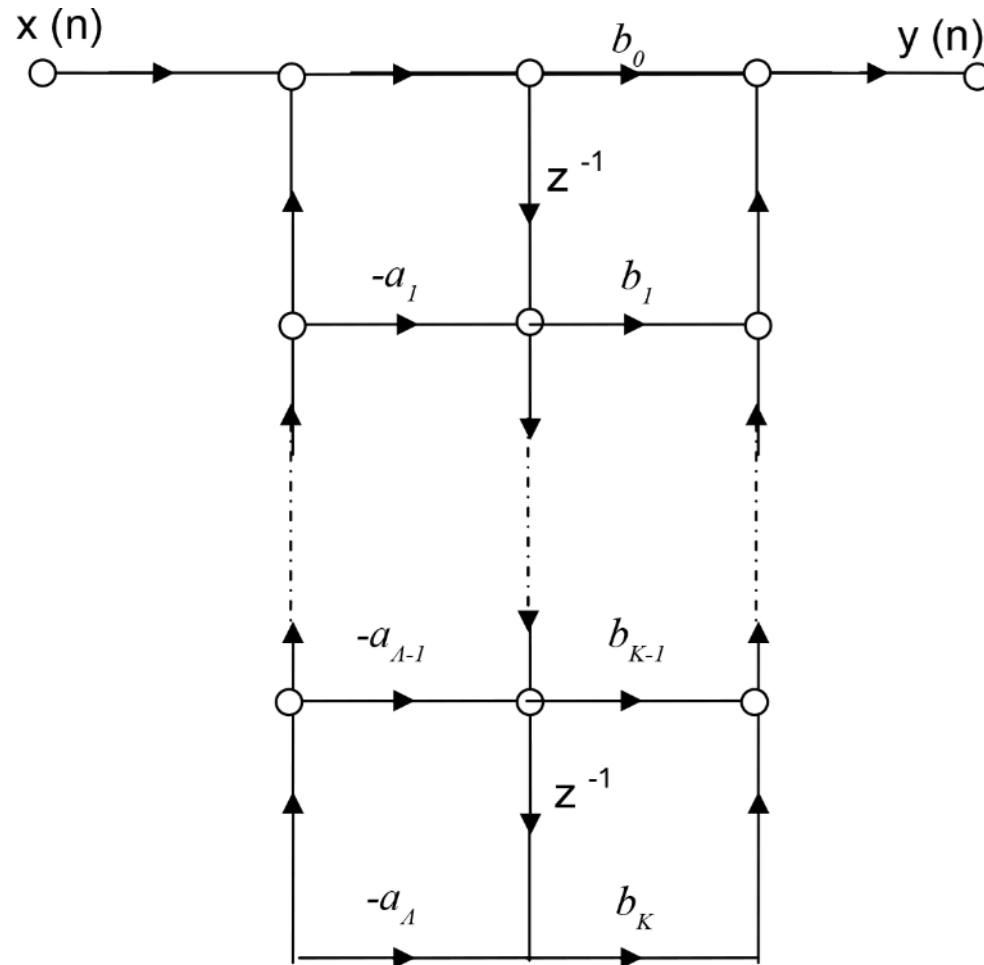
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^K \beta_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \alpha_{\lambda} \cdot z^{-\lambda}}$$

- Διαγραμματική υλοποίηση *ευθείας μορφής τύπου II*



Περιγραφή IIR συστημάτων

- Εναλλακτικά και για «οικονομία» μονάδων καθυστέρησης η ευθεία μορφή II αναπαρίσταται:

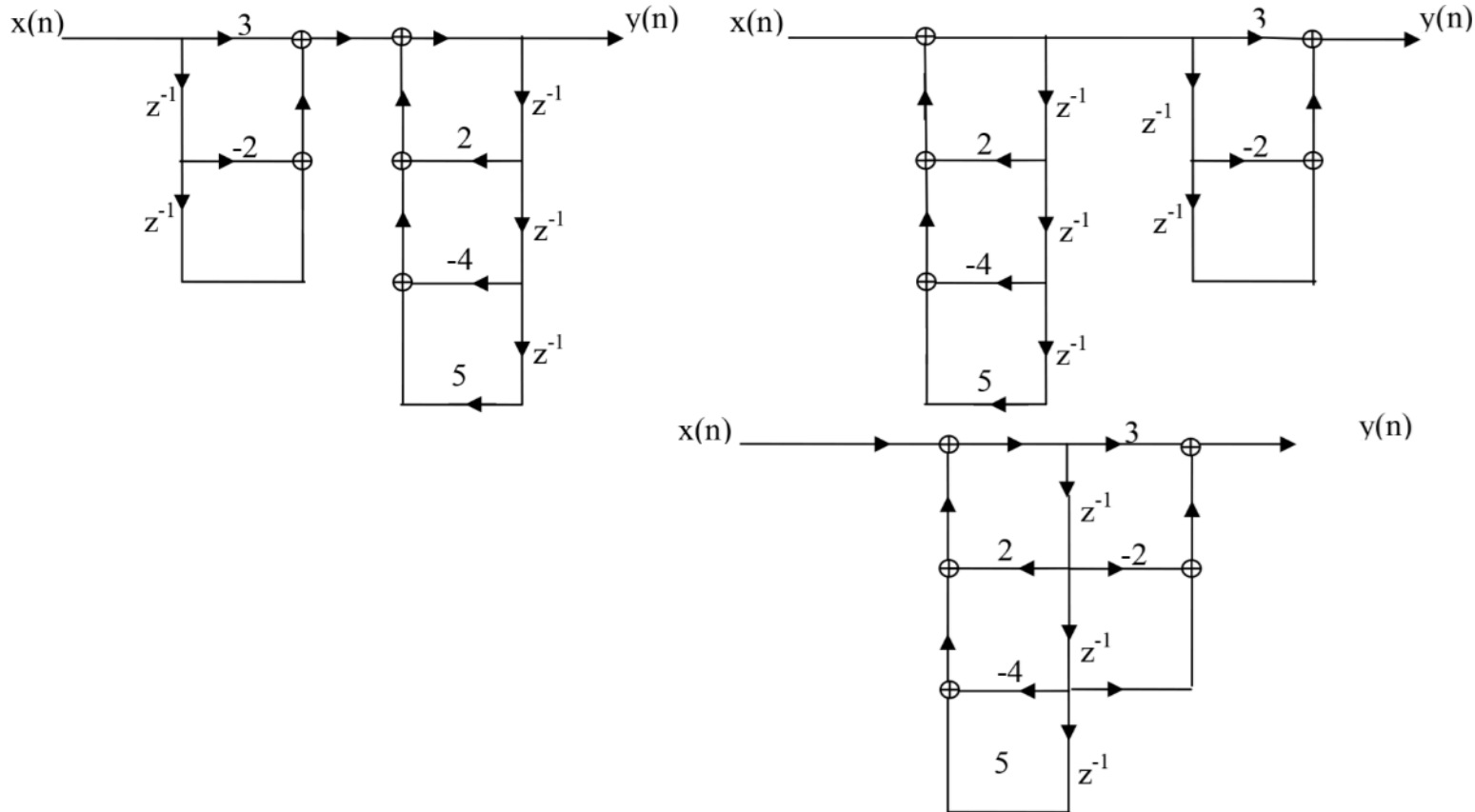


Περιγραφή IIR συστημάτων

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{3 - 2z^{-1} + z^{-2}}{1 + 2z^{-1} - 4z^{-2} + 5z^{-3}}$$

- Περιγράφεται από τα ψηφιακά δικτυώματα:



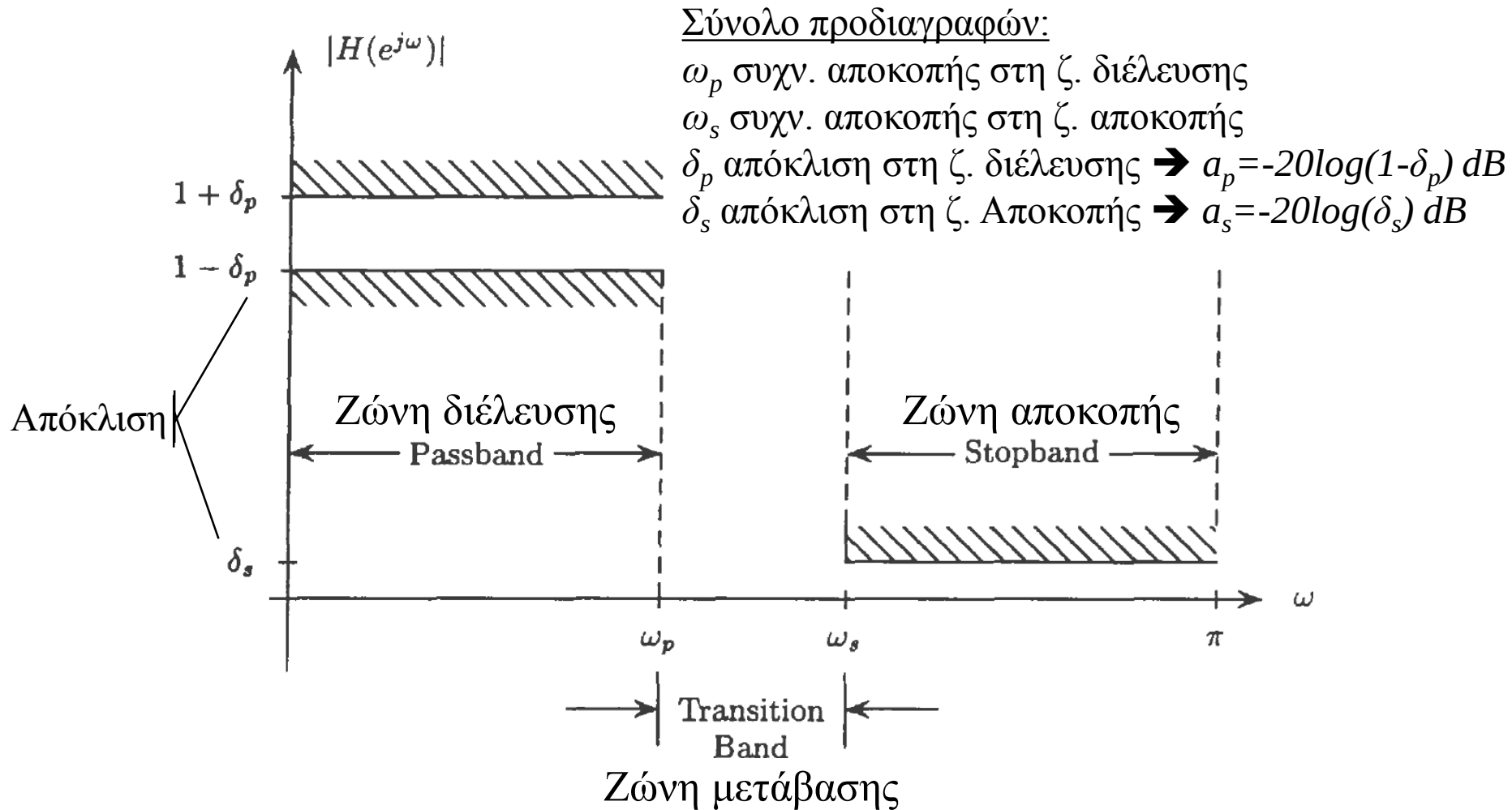
Σχεδίαση φίλτρων

Σχεδίαση φίλτρων

- Διαδικασία σχεδίασης
 - Ξεκινά από προδιαγραφές του φίλτρου
 - Περιορισμοί
 - Πλάτος
 - Φάση
 - Απόκριση συχνότητας
 - Κρουστική απόκριση
 - Βηματική απόκριση
 - Τύπος του φίλτρου (FIR, IIR)
 - Τάξη του φίλτρου
 - Ακολουθεί καθορισμός των συντελεστών του φίλτρου
 - Υλοποίηση σε υλικό ή/και λογισμικό
 - Κβαντισμός συντελεστών του φίλτρου (προαιρετικά)

Σχεδίαση φίλτρων

- Προδιαγραφές φίλτρων
 - Περίπτωση χαμηλοπερατών φίλτρων



Σχεδίαση φίλτρων

- Φίλτρα FIR
 - Χρήση παραθύρων
 - Δειγματοληψία συχνότητας
 - Ισοκυματικά φίλτρα γραμμικής φάσης
- Φίλτρα IIR
 - Μέσω σχεδίασης χαμηλοπερατών αναλογικών φίλτρων
 - Butterworth, Chebyshev, Ελλειπτικά
 - Εφαρμογή μετασχηματισμού συχνοτήτων (υψηπερατά, κλπ)
- Προσέγγιση των ελαχίστων τετραγώνων
 - Απευθείας στο πεδίο των δειγμάτων (χρόνου)

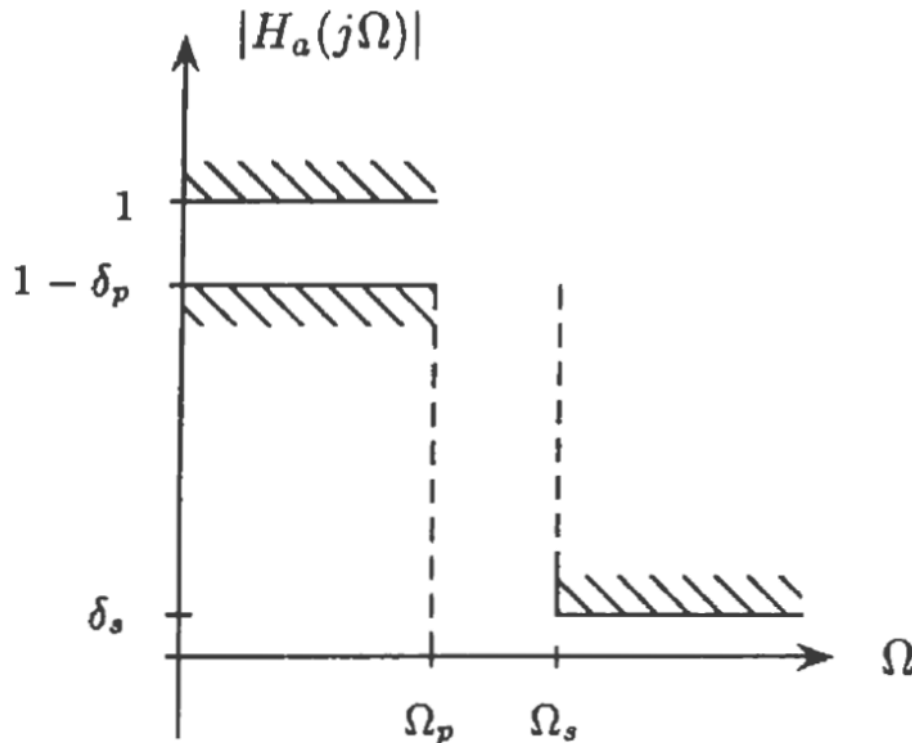
Σχεδίαση φίλτρων IIR

- Δύο γενικοί τρόποι σχεδίασης
 - Σχεδίαση αναλογικού IIR και απεικόνιση στο ισοδύναμο ψηφιακό φίλτρο
 - Χρήση αλγοριθμικής διαδικασίας σχεδίασης με επίλυση συστήματος γραμμικών ή μη-γραμμικών εξισώσεων

Σχεδίαση φίλτρων IIR

- Πρότυπα αναλογικών χαμηλοπερατών φίλτρων
 - Τυπικό σύνολο **προδιαγραφών στη ζώνη διέλευσης**

$$1 - \delta_p \leq |H_a(j\Omega)| \leq 1$$

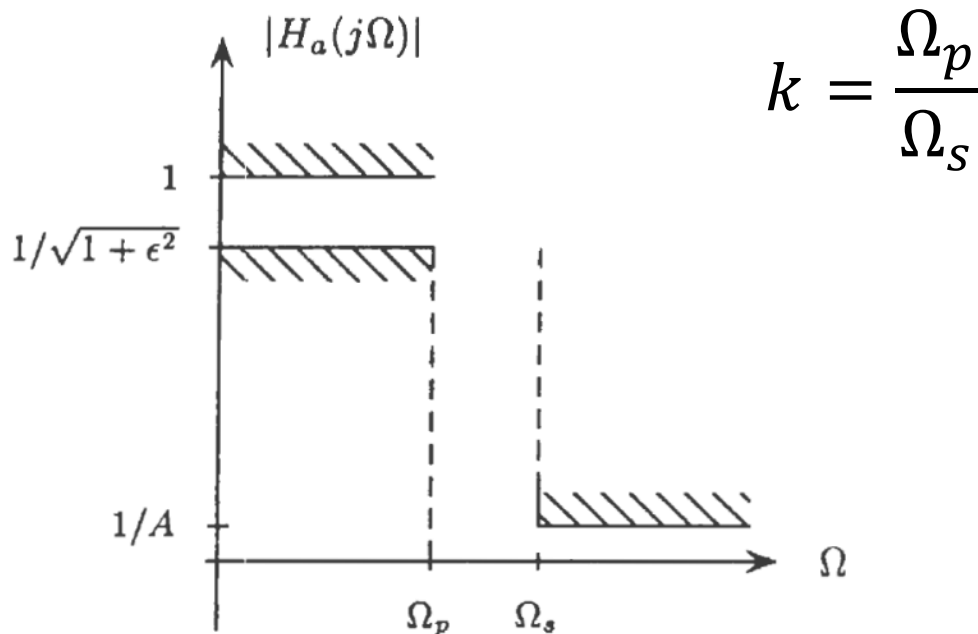


Σχεδίαση φίλτρων IIR

- Πρότυπα αναλογικών χαμηλοπερατών φίλτρων
 - Εναλλακτικά με χρήση δύο βοηθητικών παραμέτρων:
 - Παράγοντας διακριτικότητας (discrimination factor)

$$d = \left[\frac{(1 - \delta_p)^{-2} - 1}{\delta_s^{-2} - 1} \right]^{1/2} = \frac{\epsilon}{\sqrt{A^2 - 1}}$$

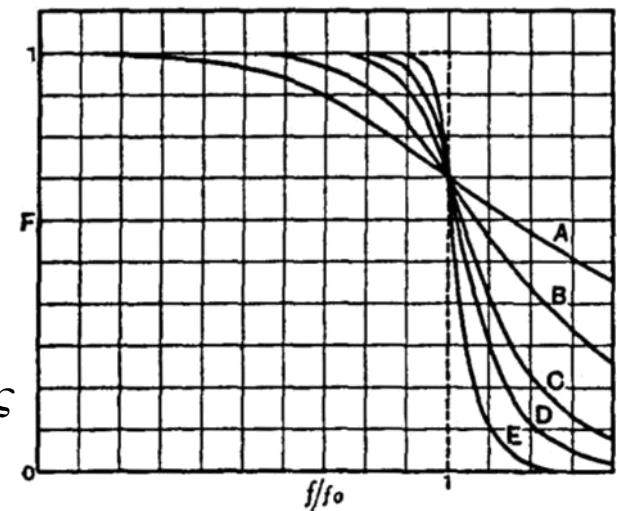
- Παράγοντας επιλεκτικότητας (selectivity factor)



Φίλτρο Butterworth

- Το **φίλτρο Butterworth** είναι ένα φίλτρο που σχεδιάστηκε ώστε να έχει **την πιο ομαλή κατά το δυνατόν απόκριση συχνότητας στην περιοχή διέλευσης**
 - Αναφέρεται επίσης ως το περισσότερο επίπεδου πλάτους φίλτρο
- Περιγράφηκε πρώτη φορά το 1930 από το Βρετανό μηχανικό Stephen Butterworth
 - On the Theory of Filter Amplifiers

*Εικόνα από την εργασία του 1930
με καμπύλες για 2, 4, 6, 8, 10 πόλους*



Φίλτρο Butterworth

- Το τετράγωνο του πλάτους της απόκρισης συχνότητας

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{j\Omega}{j\Omega_c}\right)^{2N}}$$

- όπου N παράμετρος που αντιστοιχεί στην τάξη του φίλτρου (αριθμός πόλων) και Ω_c η συχνότητα αποκοπής στα $3dB$
- Το πλάτος μπορεί να γραφεί

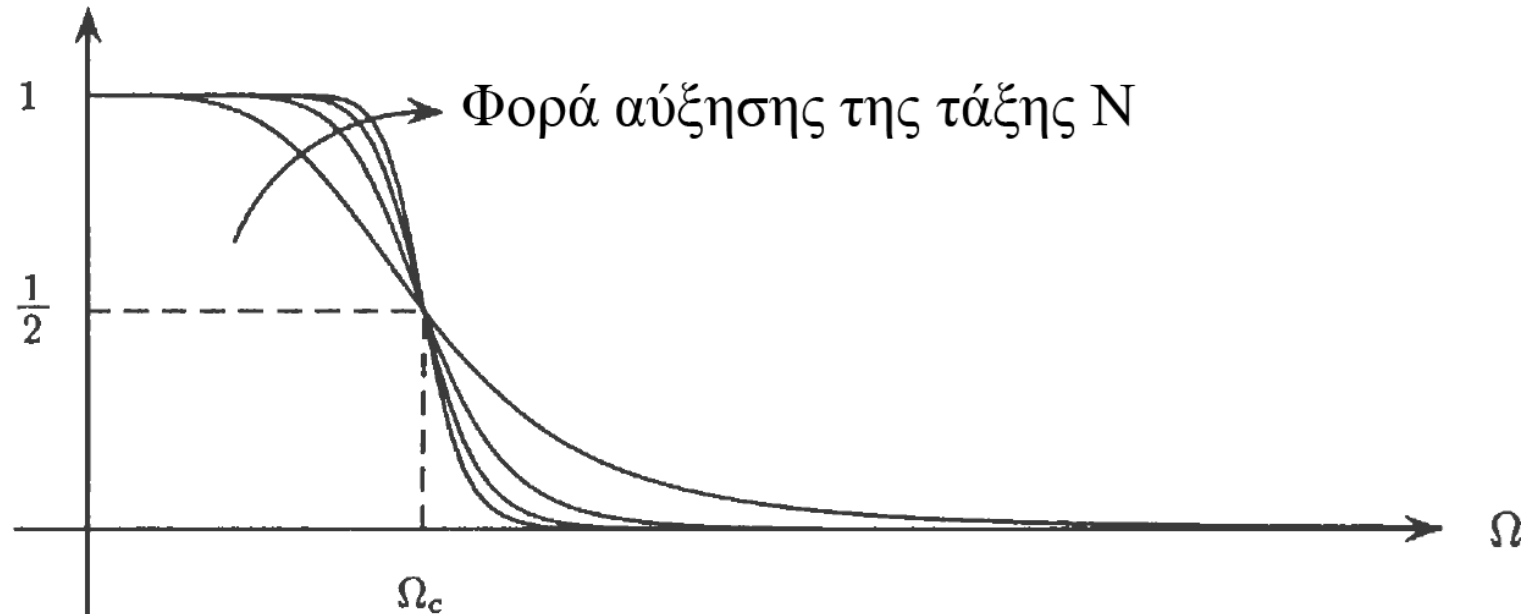
$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left(\frac{j\Omega}{j\Omega_p}\right)^{2N}}, \quad \text{όπου } \epsilon = \left(\frac{\Omega_p}{\Omega_c}\right)^N$$

Φίλτρο Butterworth

- Χαρακτηριστικά

- Η **απόκριση συχνότητας** φθίνει με την αύξηση της Ω
- Το **εύρος της ζώνης μετάβασης** μειώνεται όσο αυξάνεται η τάξη N

$$|H_a(j\Omega)|^2$$

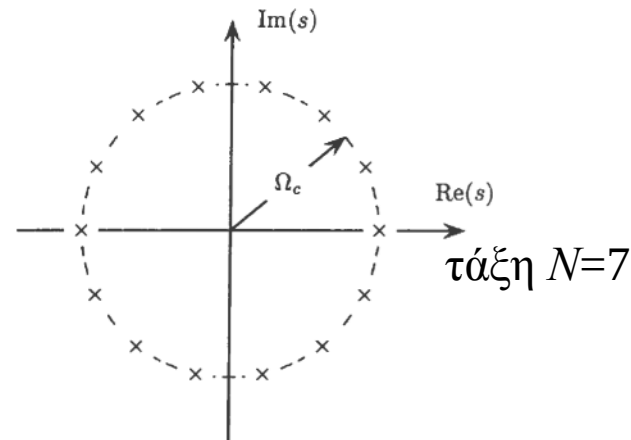
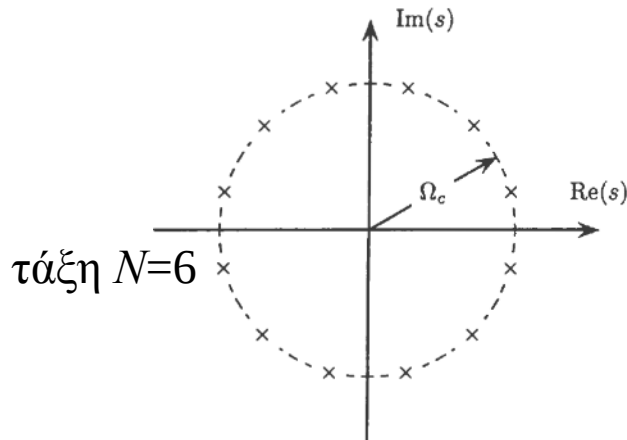


Φίλτρο Butterworth

$$\left. \begin{aligned} |H_a(j\Omega)|^2 &= \frac{1}{1 + \left(\frac{j\Omega}{j\Omega_c}\right)^{2N}} \\ |H_a(j\Omega)|^2 &= H_a(s) H_a(-s) \Big|_{s=j\Omega} \end{aligned} \right\} \rightarrow G_a(s) = H_a(s) H_a(-s) = \frac{1}{1 + \left(s/j\Omega_c\right)^{2N}}$$

Οι πόλοι της οποίας είναι σε $2N$ ισαπέχοντα σημεία γύρω από κύκλο ακτίνας Ω_c συμμετρικά τοποθετημένα ως προς τον άξονα $j\Omega$

$$s_k = (-1)^{\frac{1}{2N}} (j\Omega_c) = \Omega_c e^{j\frac{N+1+2k}{2N}\pi}, \quad k = 0, 1, \dots, 2N - 1$$



- Από τις N ρίζες υπολογίζεται η συνάρτηση μεταφοράς

$$H_a(s) = \frac{1}{s^N + a_1 s^{N-1} + \dots + a_{N-1} s^1 + a_N}$$

Φίλτρο Butterworth

- Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να εκφραστεί επίσης ως γινόμενο παραγόντων:

$$H_a(s) = \frac{G_0}{\prod_{k=1}^N (s - s_k) / \Omega_c}$$

$G_0 = 1$ και $\Omega_c = 1$ για κανονικοποιημένο φίλτρο

- Ο παρονομαστής αποτελεί ένα **πολυώνυμο Butterworth** με γενική κανονικοποιημένη μορφή:

$$B_N(s) = \prod_{k=1}^{N/2} \left[s^2 - 2 \cdot s \cdot \cos \left(\frac{2k + N - 1}{2N} \pi \right) + 1 \right], N \text{ άρτιος}$$

$$B_N(s) = (s + 1) \prod_{k=1}^{(N-1)/2} \left[s^2 - 2 \cdot s \cdot \cos \left(\frac{2k + N - 1}{2N} \pi \right) + 1 \right], N \text{ περιττός}$$

Φίλτρο Butterworth

- Το πολυώνυμο Butterworth για διαφορετικές τιμές N δίνει μια σειρά από παράγοντες
 - Για $N=1 \dots 8$ είναι:

1	$(s + 1)$
2	$s^2 + 1.4142s + 1$
3	$(s + 1)(s^2 + s + 1)$
4	$(s^2 + 0.7654s + 1)(s^2 + 1.8478s + 1)$
5	$(s + 1)(s^2 + 0.6180s + 1)(s^2 + 1.6180s + 1)$
6	$(s^2 + 0.5176s + 1)(s^2 + 1.4142s + 1)(s^2 + 1.9319s + 1)$
7	$(s + 1)(s^2 + 0.4450s + 1)(s^2 + 1.2470s + 1)(s^2 + 1.8019s + 1)$
8	$(s^2 + 0.3902s + 1)(s^2 + 1.1111s + 1)(s^2 + 1.6629s + 1)(s^2 + 1.9616s + 1)$

- από όπου προκύπτουν και οι αντίστοιχες ρίζες του πολυωνύμου όταν βρίσκεται στον παρονομαστή του $H(s)$

Φίλτρο Butterworth

- Από την παραγοντοποιημένη μορφή του πολυωνύμου Butterworth για διαφορετικές τιμές του N εξάγουμε τους **συντελεστές** της συνάρτησης μεταφοράς:

N	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
1	1.0000							
2	1.4142	1.0000						
3	2.0000	2.0000	1.0000					
4	2.6131	3.4142	2.6131	1.0000				
5	3.2361	5.2361	5.2361	3.2361	1.0000			
6	3.8637	7.4641	9.1416	7.4641	3.8637	1.0000		
7	4.4940	10.0978	14.5918	14.5918	10.0978	4.4940	1.0000	
8	5.1258	13.1371	21.8462	25.6884	21.8462	13.1372	5.1258	1.0000

Φίλτρο Butterworth

- Όταν δίνονται οι παράμετροι Ω_p , Ω_s , δ_p , δ_s
 1. Από τις προδιαγραφές υπολογίζονται οι παράγοντες διακριτικότητας (d) και επιλεκτικότητας (k)
 2. Προσδιορίζεται η απαιτούμενη τάξη του φίλτρου από:

$$N \geq \frac{\log d}{\log k}$$

3. Τίθεται η συχνότητα αποκοπής των 3dB, Ω_c ως:

$$\Omega_p \left[(1 - \delta_p)^{-2} - 1 \right]^{-1/2N} \leq \Omega_c \leq \Omega_s [\delta_s^{-2} - 1]^{-1/2N}$$

4. Γίνεται σύνθεση της συνάρτησης μεταφοράς από πόλους

$$G_a(s) = H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1 + (s/j\Omega_c)^{2N}}$$

που βρίσκονται στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο

$$H_a(s) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{-s_k}{s - s_k} \quad s_k = \Omega_c e^{j \frac{N+1+2k}{2N} \pi}$$

Παράδειγμα σχεδίασης χ/π Butterworth

- Να σχεδιαστεί χαμηλοπερατό φίλτρο Butterworth με προδιαγραφές:

$$f_p=6 \text{ kHz}, \quad f_s=10 \text{ kHz}, \quad \delta_p=\delta_s=0.1$$

- Υπολογίζονται αρχικά οι παράγοντες διακριτικότητας και επιλεκτικότητας

$$\bullet \quad d = \left[\frac{(1-\delta_p)^{-2}-1}{\delta_s^{-2}-1} \right]^{1/2} = 0.0487, \quad k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = \frac{f_p}{f_s} = 0.6$$

- Επειδή $N \geq \frac{\log d}{\log k} = 5.92$, έπεται ότι απαιτείται τάξη τουλάχιστον 6

- Με κεντρική συχνότητα που εντοπίζεται στο διάστημα

$$f_p \left[(1 - \delta_p)^{-2} - 1 \right]^{-1/2N} = \mathbf{6770} \leq f_c \leq \mathbf{6819} = f_s [\delta_s^{-2} - 1]^{-1/2N}$$

- Η συνάρτηση μεταφοράς εκτιμάται από το κανονικοποιημένο φίλτρο 6^{ης} τάξης με αντικατάσταση όπου s το s/Ω_c

$$H_a(s) = \frac{1}{s^6 + 3.8637s^5 + 7.4641s^4 + 9.1416s^3 + 7.4641s^2 + 3.8637s + 1}$$

Φίλτρο Chebyshev

- Τα φίλτρα Chebyshev ορίζονται με τη βοήθεια των **πολυωνύμων Chebyshev**

$$T_N(x) = \begin{cases} \cos(N \cdot \cos^{-1}x) & |x| \leq 1 \\ \cosh(N \cdot \cosh^{-1}x) & |x| > 1 \end{cases}$$

- τα οποία δημιουργούνται από την αναδρομική σχέση
 $T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x)$, $k \geq 1, T_0(x) = 1, T_1(x) = x$
- και παρουσιάζουν τις εξής ιδιότητες
 - $|x| \leq 1 \Rightarrow |T_N(x)| \leq 1$**
 - $|x| > 1 \Rightarrow T_N(x)$ τιμή πολυωνύμων αυξάνεται μονοτονικά
 - $\forall N \quad T_N(1) = 1$
 - Για άρτια $N \Rightarrow T_N(0) = \pm 1$, για περιττά $N \Rightarrow T_N(0) = 0$
 - Όλες οι ρίζες του $T_N(x)$ βρίσκονται στο διάστημα $-1 \leq x \leq 1$

Φίλτρο Chebyshev

- Δύο οι τύποι των φίλτρων Chebyshev
 - Chebyshev τύπου I
 - Ισοκυματική ζώνη διέλευσης και μονότονα φθίνουσα ζώνη αποκοπής
 - Η συνάρτηση μεταφοράς περιλαμβάνει μόνο πόλους
 - Chebyshev τύπου II
 - Μονότονη ζώνη διέλευσης και ισοκυματική ζώνη αποκοπής
 - Η συνάρτηση μεταφοράς περιλαμβάνει πόλους και μηδενικά

Φίλτρο Chebyshev

- Chebyshev **τύπου I**

- Πολυώνυμα τύπου I

- $T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x), \quad k \geq 1, T_0(x) = 1, T_1(x) = x$

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$$

$$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x.$$

$$T_{10}(x) = 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1.$$

$$T_{11}(x) = 1024x^{11} - 2816x^9 + 2816x^7 - 1232x^5 + 220x^3 - 11x.$$

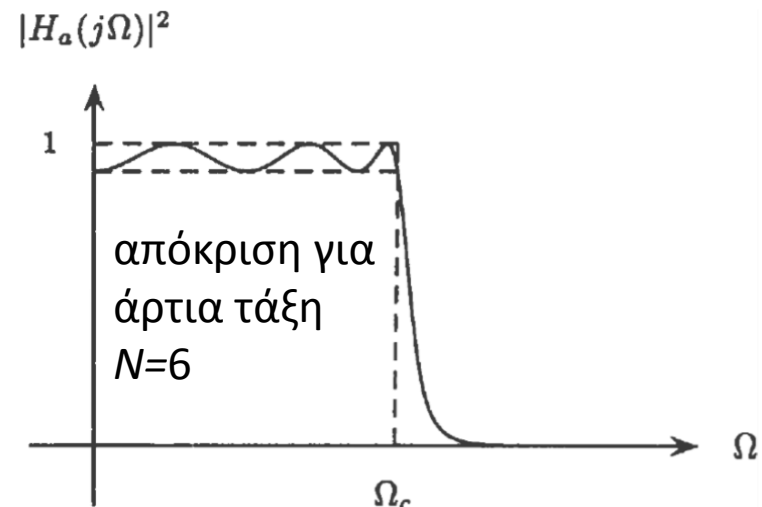
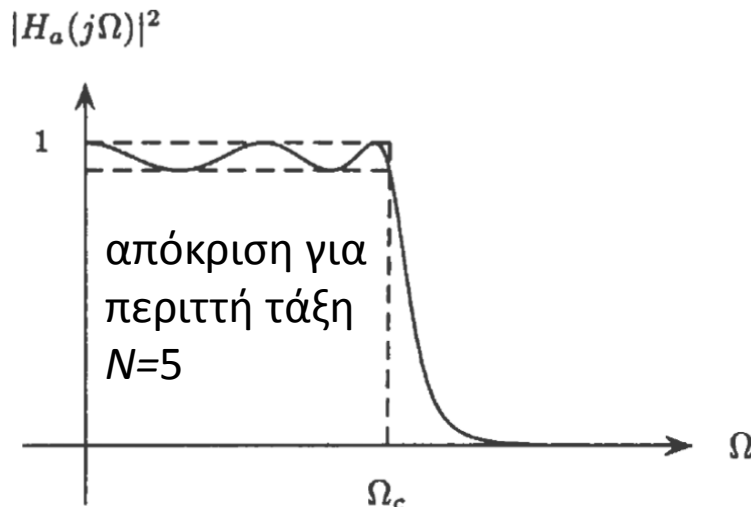
Φίλτρο Chebyshev

- Chebyshev **τύπου I**

- Το πλάτος της απόκρισης συχνότητας δίνεται:

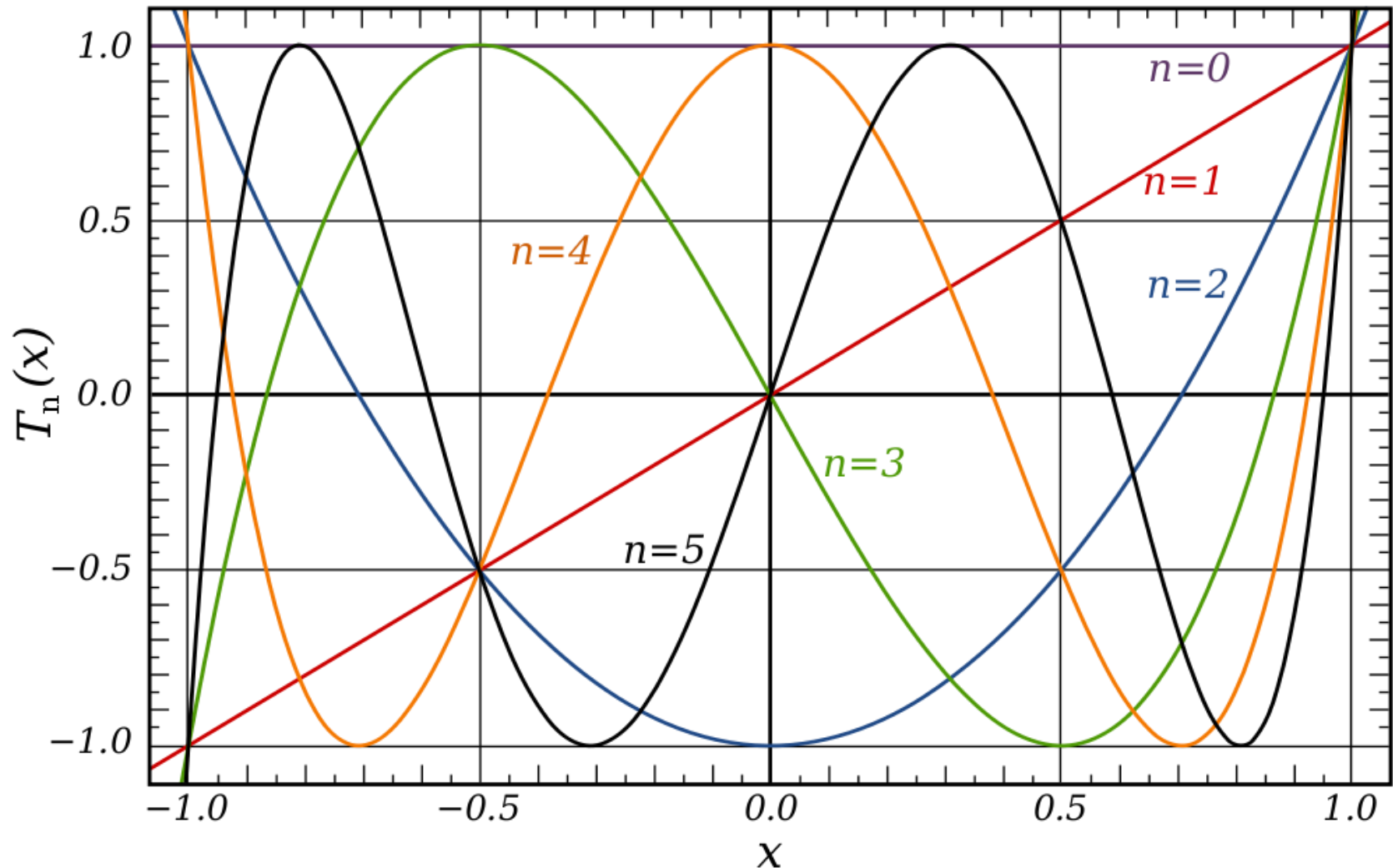
$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2 \left(\frac{\Omega}{\Omega_p} \right)}$$

- όπου Ω_p η συχνότητα αποκοπής στη ζώνη διέλευσης και ϵ η παράμετρος που ελέγχει το πλάτος της κυμάτωσης οδηγώντας σε ταλάντωση μεταξύ 1 και $1/(1 + \epsilon^2)$



Φίλτρο Chebyshev

- Πολυώνυμα Chebyshev **τύπου I** για $N=1\dots5$ στο $-1\leq x\leq 1$



Φίλτρο Chebyshev

- Chebyshev **τύπου I**

- Η συνάρτηση μεταφοράς έχει τη μορφή

$$H_a(s) = H_a(0) \prod_{k=0}^{N-1} \frac{-s_k}{s - s_k}, \quad H_a(0) = \begin{cases} (1 - \epsilon^2)^{-1/2} & \text{για } N \text{ άρτιο} \\ 1 & \text{για } N \text{ άρτιο} \end{cases}$$

- **Βήματα σχεδίασης**

1. Με δεδομένα

- Συχνότητα αποκοπής στη ζώνη διέλευσης και αποκοπής (Ω_p , Ω_s ή f_p , f_s)
- Κυμάτωση στη ζώνη διέλευσης (είτε ως δ_p , δ_s είτε ως ϵ , A)

2. Υπολογισμός παραγόντων επιλεκτικότητας k , διακριτικότητας d

3. Προσδιορισμός τάξης $N \geq \frac{\cosh^{-1}(\frac{1}{d})}{\cosh^{-1}(\frac{1}{k})}$

4. Δημιουργούμε την $G_a(s) = H_a(s)H_a(-s) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2(s/j\Omega)}$

5. Εξάγουμε την $H_a(s)$ από τους πόλους της $G_a(s)$ στο αριστερό μιγαδικό ημιεπίπεδο (s-plane)

Παράδειγμα σχεδίασης χ/π Chebyshev I

- Να σχεδιαστεί χαμητό φίλτρο Chebyshev τύπου I με προδιαγραφές:

$$f_p = 6 \text{ kHz}, \quad f_s = 10 \text{ kHz}, \quad \delta_p = \delta_s = 0.1$$

- Υπολογίζονται αρχικά οι παράγοντες διακριτικότητας και επιλεκτικότητας

$$\bullet \quad d = \left[\frac{(1 - \delta_p)^{-2} - 1}{\delta_s^{-2} - 1} \right]^{1/2} = 0.0487, \quad k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = \frac{f_p}{f_s} = 0.6$$

- Επειδή $N \geq \frac{\cosh^{-1}(\frac{1}{d})}{\cosh^{-1}(\frac{1}{k})} = 3.38$, $\Rightarrow$ απαιτείται τάξη τουλάχιστον $N=4$

- Συνεπώς το πολυώνυμο Chebyshev I είναι $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

- Άρα $|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 T_N^2\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)}$, όπου $\Omega_p = 2\pi f_p$, $T_4\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right) = 8\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)^4 - 8\left(\frac{\Omega}{\Omega_p}\right)^2 + 1$

$$\bullet \quad \text{και } \epsilon = \left[(1 - \delta_p)^{-2} - 1 \right]^{-1/2} = 0.4843$$

Φίλτρο Chebyshev

- Chebyshev **τύπου II**

- Πολυώνυμα τύπου II

- $U_{k+1}(x) = 2xU_k(x) - U_{k-1}(x), \quad k \geq 1, U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x$

$$U_0(x) = 1$$

$$U_1(x) = 2x$$

$$U_2(x) = 4x^2 - 1$$

$$U_3(x) = 8x^3 - 4x$$

$$U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$$

$$U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$$

$$U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$$

$$U_7(x) = 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$$

$$U_8(x) = 256x^8 - 448x^6 + 240x^4 - 40x^2 + 1$$

$$U_9(x) = 512x^9 - 1024x^7 + 672x^5 - 160x^3 + 10x.$$

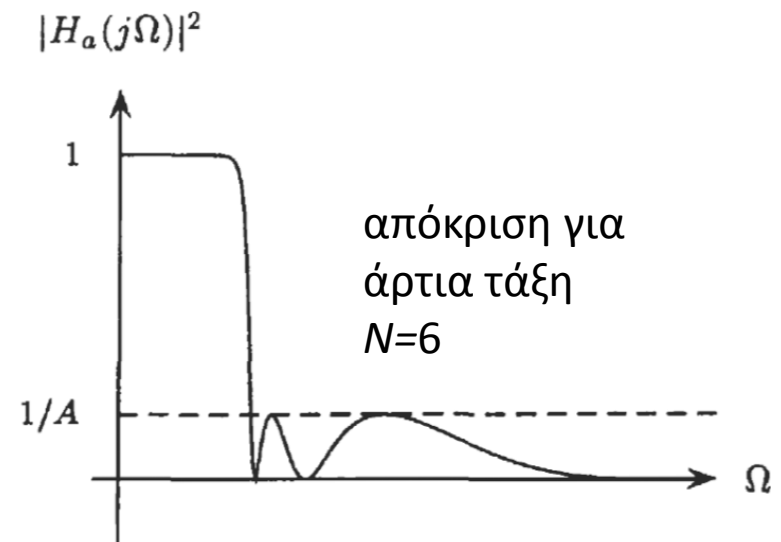
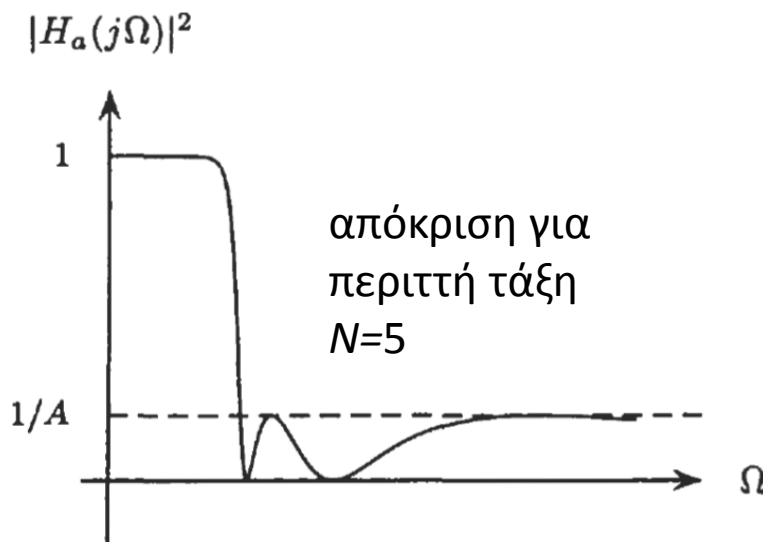
Φίλτρο Chebyshev

- Chebyshev **τύπου II**

- Το πλάτος της απόκρισης συχνότητας δίνεται:

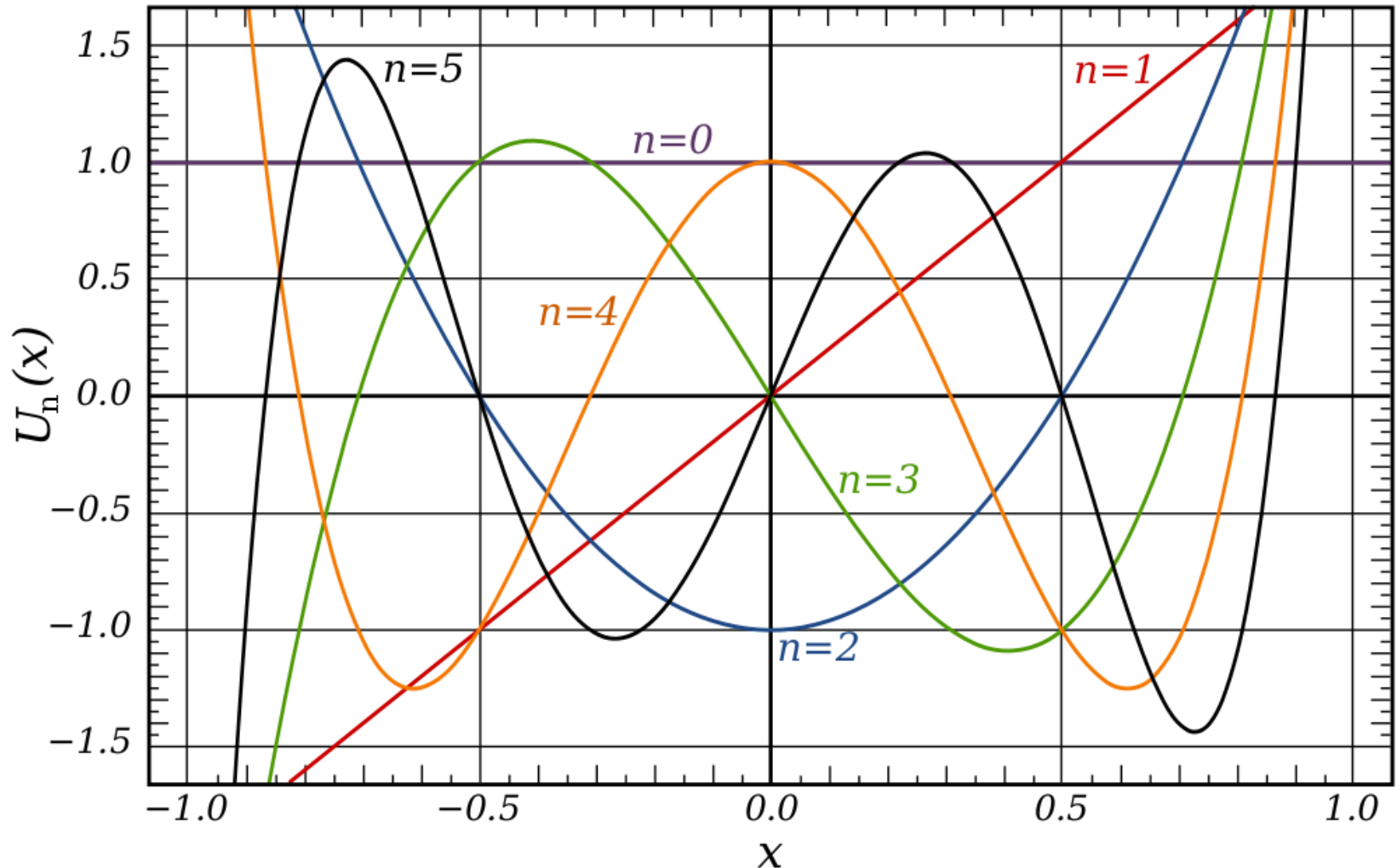
$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left[\frac{U_N\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)}{U_N\left(\frac{\Omega_s}{\Omega}\right)} \right]^2}$$

- Ω_p συχνότητα αποκοπής στη ζώνη διέλευσης Ω_s συχνότητα αποκοπής στη ζώνη αποκοπής και ϵ η παράμετρος που ελέγχει το πλάτος της κυμάτωσης οδηγώντας σε ταλάντωση μεταξύ 1 και $1/(1 + \epsilon^2)$ ή μεταξύ 0 και $1/A$



Φίλτρο Chebyshev

- Πολυώνυμα Chebyshev **τύπου II** για $N=1\dots5$ στο $-1\leq x\leq 1$



Φίλτρο Chebyshev

- Chebyshev **τύπου II**

- Η συνάρτηση μεταφοράς έχει τη μορφή

$$H_a(s) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{a_k}{b_k} \cdot \frac{s - b_k}{s - a_k}$$

- με πόλους στα σημεία $a_k = \Omega_s^2/s_k$ και s_k οι πόλοι ενός φίλτρου τύπου I
- τα μηδενικά είναι πάνω στο φανταστικό άξονα όπου $U_N(\Omega_s/\Omega) = 0$

- **Βήματα σχεδίασης**

- Όμοια με τύπου I με μόνη διαφορά στον υπολογισμό:

$$\epsilon = (\delta_s^{-2} - 1)^{-1/2}$$

Παράδειγμα σχεδίασης χ/π Chebyshev II

- Να σχεδιαστεί χαμ/τό φίλτρο Chebyshev τύπου II με προδιαγραφές:

$$f_p = 6 \text{ kHz}, \quad f_s = 10 \text{ kHz}, \quad \delta_p = \delta_s = 0.1$$

- Υπολογίζονται αρχικά οι παράγοντες διακριτικότητας και επιλεκτικότητας

$$\bullet \quad d = \left[\frac{(1 - \delta_p)^{-2} - 1}{\delta_s^{-2} - 1} \right]^{1/2} = 0.0487, \quad k = \frac{\Omega_p}{\Omega_s} = \frac{f_p}{f_s} = 0.6$$

- Επειδή $N \geq \frac{\cosh^{-1}(\frac{1}{d})}{\cosh^{-1}(\frac{1}{k})} = 3.38$, $\Rightarrow$ απαιτείται τάξη τουλάχιστον $N=4$

- Συνεπώς το πολυώνυμο Chebyshev II είναι $U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$

$$\bullet \quad \text{Άρα } |H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \left[\frac{U_N\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)}{U_N\left(\frac{\Omega_s}{\Omega}\right)} \right]^2},$$

- όπου $\Omega_p = 2\pi f_p$, $U_4\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right) = 16\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)^4 - 12\left(\frac{\Omega_s}{\Omega_p}\right)^2 + 1$ και $\epsilon = [\delta_s^{-2} - 1]^{-1/2} = 0.1$

Φίλτρα IIR από αναλογικά φίλτρα

- Σχεδίαση ψηφιακού από πρότυπο αναλογικό φίλτρο

- απαιτεί μετασχηματισμό της $h_a(t)$ σε $h(n)$
- Απεικόνιση του μιγαδικού s -επιπέδου στο z -επίπεδο

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s=m(z)}$$

- με $s=m(z)$ τη συνάρτηση απεικόνισης
- Ιδιότητες της $m(z)$ για να είναι αποδεκτό το φίλτρο
 - Ένα-προς-ένα απεικόνιση από τον άξονα $j\Omega$ στο μοναδιαίο κύκλο (διατήρηση χαρακτηριστικών του αναλογικού φίλτρου)
 - Το αριστερό ημιεπίπεδο πρέπει να απεικονίζεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου (διατήρηση της ευστάθειας)
 - Η $m(z)$ ρητή συνάρτηση για απεικόνιση σε ρητή $H(z)$

Φίλτρα IIR από αναλογικά φίλτρα

- Τυπικές **προσεγγίσεις για απεικόνιση** αναλογικών φίλτρων σε ψηφιακά
 - **Κρουστική αμεταβλητότητα** (impulse invariance)
 - Δειγματοληψία της κρουστικής απόκρισης του αναλογικού φίλτρου
 - **Διγραμμικός μετασχηματισμός** (bilinear transformation)
 - Απεικόνιση του s -επίπεδο στο z -επίπεδο με δεδομένη σχέση

Φίλτρα IIR από αναλογικά φίλτρα

- Διγραμμικός μετασχηματισμός

- Η απεικόνιση ορίζεται από τη σχέση $s = \frac{2}{T_s} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$

- Η **συνάρτηση μεταφοράς** του ψηφιακού φίλτρου είναι:

$$H(z) = H_a(s) = H_a\left(\frac{2}{T_s} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right)$$

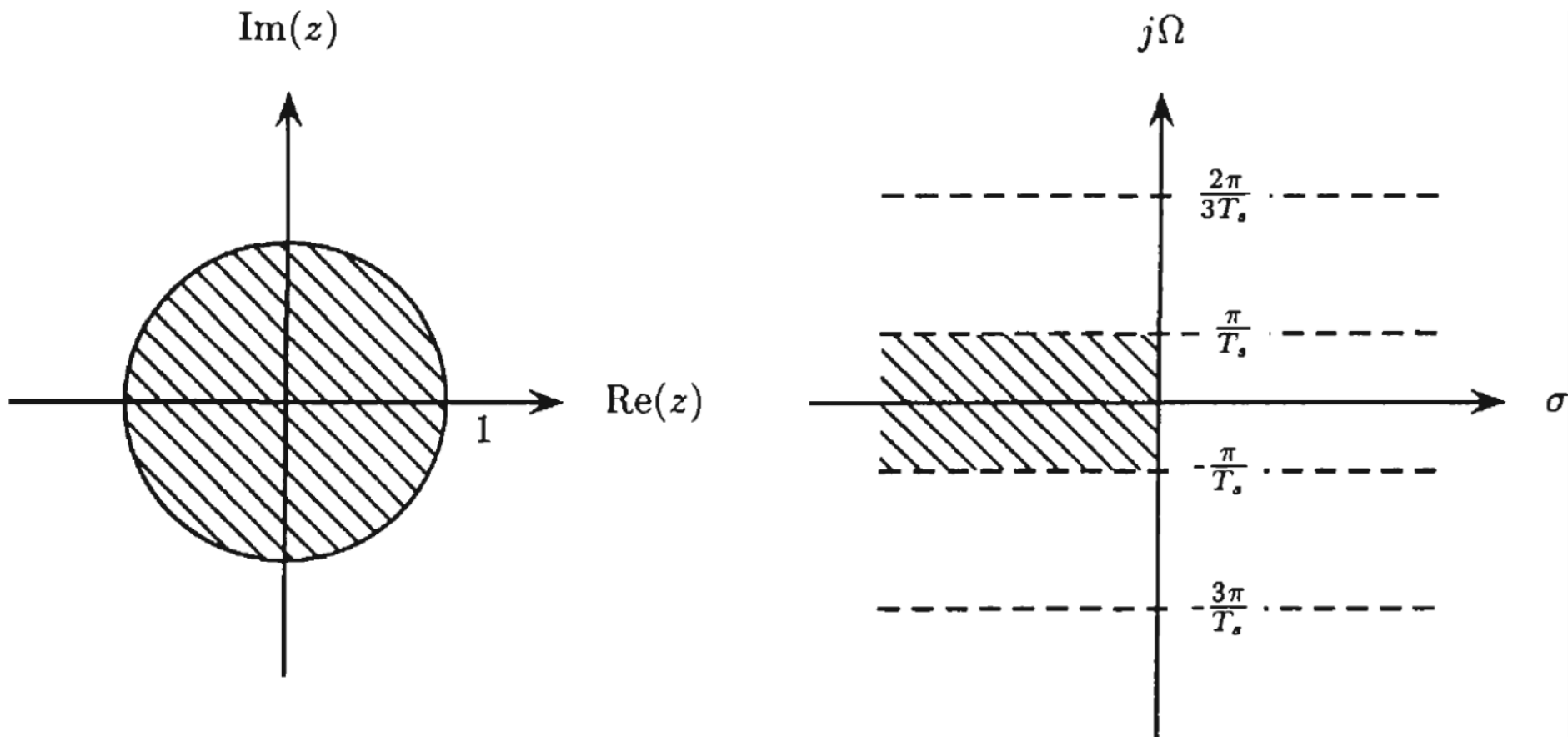
- Η σχέση μεταξύ του άξονα $j\Omega$ και του μοναδιαίου κύκλου είναι μη γραμμική και εκφράζεται από τη **συνάρτηση στρέβλωσης συχνότητας** (frequency warping function)

$$\omega = 2 \cdot \tan^{-1} \left(\frac{\Omega T_s}{2} \right) \quad \text{αντίστροφα είναι: } \Omega = \frac{2}{T_s} \cdot \tan \left(\frac{\omega}{2} \right)$$

- ως αποτέλεσμα της στρέβλωσης ο Μ/Σ διατηρεί μόνο το πλάτος της απόκρισης συχνότητας του αναλογικού φίλτρου

Φίλτρα IIR από αναλογικά φίλτρα

- Η απεικόνιση του διγραμμικού μετασχηματισμού



Φίλτρα IIR από αναλογικά φίλτρα

- **Διγραμμικός μετασχηματισμός** - Βήματα διαδικασίας
 - Για ζητούμενο χαμηλοπερατό διακριτό φίλτρο με προδιαγραφές που ορίζονται από τα ω_p , ω_s , ω_c , δ_p , δ_s
 - Πραγματοποιείται αποστρέβλωση (prewarping) της συχνότητας με τη σχέση $\Omega = \frac{2}{T_s} \cdot \tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$
 - Σχεδιάζεται το αναλογικό φίλτρο
 - Εφαρμόζεται ο διγραμμικός μετασχηματισμός και λαμβάνεται το διακριτό φίλτρο

Φίλτρα IIR από αναλογικά φίλτρα

• ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

- Σχεδίαση χαμηλοπερατού φίλτρου πρώτης τάξης με συχνότητα αποκοπής των 3dB $\omega_c = 0.25\pi$ με διγραμμικό μετασχηματισμό φίλτρου Butterworth με συν. μεταφοράς

$$H_a(s) = \frac{1}{1 + \frac{s}{\Omega_c}}$$

- Η συχνότητα αποκοπής Ω_c του αναλογικού φίλτρου υπολογίζεται με αποστρέβλωση: $\Omega_c = \frac{2}{T_s} \cdot \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = \frac{0.828}{T_s}$

- Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς είναι: $H_a(s) = \frac{1}{1 + \frac{s \cdot T_s}{0.828}}$

- Με διγραμμικό μετασχηματισμό έχουμε

$$H(z) = H_a\left(\frac{2}{T_s} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right) = \frac{1}{1 + \frac{2}{0.828} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}} = 0.292 \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.416z^{-1}}$$