

Ο Μετασχηματισμός Z

Ανάλυση συστημάτων με το μετασχηματισμό Z

Ο μετασχηματισμός Z (Z-Transform: ZT)

- **χρήσιμο μαθηματικό εργαλείο** για την ανάλυση των διακριτών σημάτων και συστημάτων
- αποτελεί ό,τι ο **μετασχηματισμός Laplace** για τα σήματα και σύστημα συνεχούς μεταβλητής
- χρήση του στην **επίλυση γραμμικών εξισώσεων διαφορών με σταθερούς συντελεστές** βοηθά στην ανάλυση συστημάτων που περιγράφονται αναδρομικά
- είναι δυνατός ο **υπολογισμός της απόκρισης** και ο **έλεγχος της ευστάθειας** των LSI συστημάτων με τη χρήση του ZT

Ιστορικά στοιχεία

- Η βασική ιδέα ήταν γνωστή στο **Laplace (1749-1827)** και ξαναεμφανίστηκε το 1947 από τον W. Hurewicz σαν ένας τρόπος επίλυσης γραμμικών εξισώσεων διαφορών με σταθερούς συντελεστές
- Αργότερα (κατά το **1952**) ονομάστηκε μετασχηματισμός Z από τους **Ragazzini και Zadeh** του Πανεπιστημίου Columbia
- Ο τροποποιημένος ή προχωρημένος μετασχηματισμός Z αναπτύχθηκε αργότερα από τον **E. I. Jury (1958, 1973)**
- Η ιδέα είναι γνωστή στη βιβλιογραφία των μαθηματικών από το **1730** όταν εισήχθη από τον **de Moivre (1667-1754)** (θεωρία πιθανοτήτων) ως μέθοδος δημιουργίας συναρτήσεων
- Από μαθηματικής απόψεως μπορεί να χαρακτηριστεί ως μια **σειρά Laurent** καθώς η ακολουθία λαμβάνεται ως μια ανάπτυξη αναλυτικής συνάρτησης

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - c)^n$$

Ορισμός του μετασχηματισμού Z

- Ο μετασχηματισμός Z μιας ακολουθίας $x(n)$ ορίζεται και γράφεται ως ακολούθως:

$$x(n) \xrightarrow{ZT} X(z), \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$X(z) = \cdots + x(-1) \cdot z^1 + x(0) + x(1) \cdot z^{-1} + \cdots$$

- **Περιοχή Σύγκλισης** ή ΠΣ (Region Of Convergence ή **ROC**)

- Το σύνολο των τιμών της μιγαδικής μεταβλητής z για τις οποίες συγκλίνει το άθροισμα του μετασχηματισμού

$$ROC = \left\{ z: \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot z^{-n} \right| < \infty \right\} \rightarrow \text{έλεγχος: } |x[n] \cdot z^{-1}| < 1$$

Περιοχή σύγκλισης - ROC

- Έστω η ακολουθία $x[n] = 0.5^n$ με n στο $(-\infty, \infty)$
 $x[n] = \{\dots, 0.5^{-2}, 0.5^{-1}, 1, 0.5, 0.5^2, \dots\} =$
 $\{\dots, 2^3, 2^2, 2, 1, 0.5, 0.5^2, 0.5^3, \dots\}$

- Φαίνεται λοιπόν ότι το άθροισμα:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \rightarrow \infty$$

- Συνεπώς δεν υπάρχουν τιμές του z που ικανοποιούν τη συνθήκη και **δεν υπάρχει ROC**

Περιοχή σύγκλισης - ROC

- Έστω η ακολουθία $x[n] = 0.5^n u[n]$, n στο $(-\infty, \infty)$
 $x[n] = \{ \dots, 0, 0, 0, 1, 0.5, 0.5^2, 0.5^3, \dots \}$

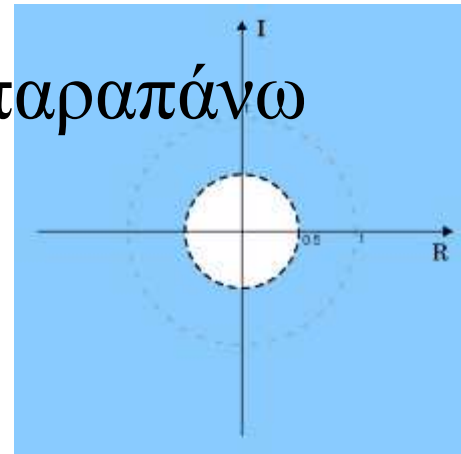
- Φαίνεται λοιπόν ότι το άθροισμα:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 0.5^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{0.5}{z} \right)^n = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

- Η τελευταία σχέση ορίζεται για

$$|0.5z^{-1}| < 1 \Rightarrow |z| > 0.5$$

- Άρα **υπάρχει ROC** και ορίζεται από την παραπάνω σχέση



Σχέση ZT με DTFT

- Αν θεωρήσουμε ότι γενικά ο z είναι μια εκθετική συνάρτηση της μορφής $\mathbf{z = re^{j\omega}}$, $r = |z|$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot (r \cdot e^{j\omega})^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot r^{-n} \cdot e^{-j\omega n} = DTFT\{x(n) \cdot r^{-n}\} \end{aligned}$$

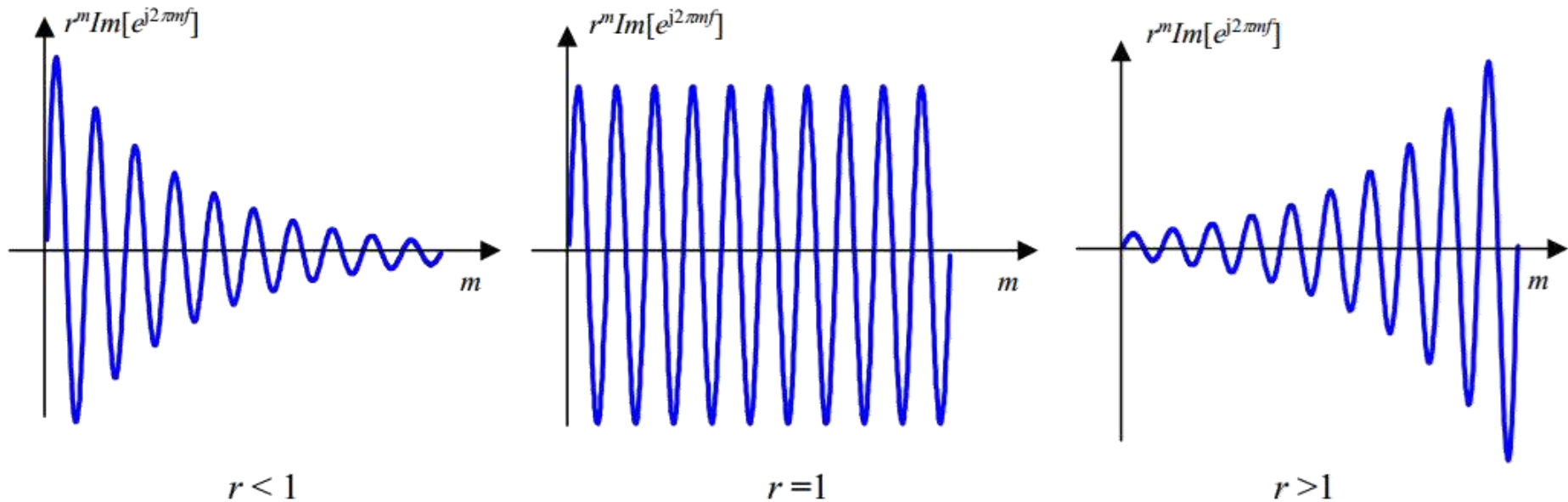
- Στην ειδική περίπτωση όπου $\mathbf{z = e^{j\omega}}$ ($r=1$)

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot (e^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n} = DTFT\{x(n)\} \\ &= X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

- Ο MZ είναι η **γενίκευση** του DTFT

Σχέση ZT με DTFT

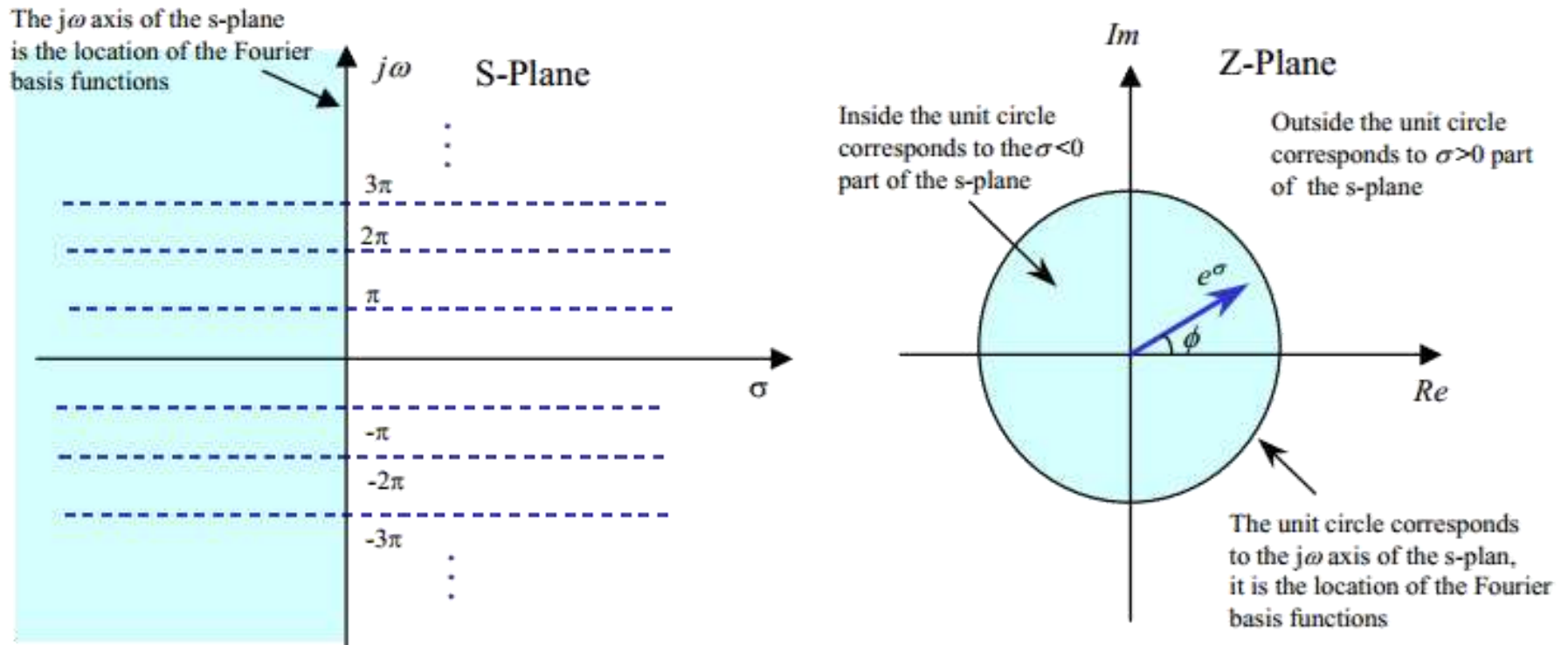
- Οι συναρτήσεις βάσης του MZ



- για $r=1$ λαμβάνουμε τις συναρτήσεις βάσης του MF

Σχέση M/Σ Laplace και MZ

- Αν φανταστούμε να υφίσταται **κάμψη ο άξονας-jω του επιπέδου-S (s-plane)** στην κατεύθυνση του αριστερού ημιεπιπέδου δημιουργώντας έναν κύκλο καθώς τα σημεία π και $-\pi$ συναντιώνται, ο κύκλος που προκύπτει καλείται **μοναδιαίος** και το διάγραμμα **επίπεδο-Z (z-plane)**
- Η χρωματισμένη περιοχή στο S-plane είναι η περιοχή των ευσταθών και αιτιατών σημάτων και συστημάτων



Σχέση M/Σ Laplace και MZ

- Αντιστοίχιση συχνοτήτων και γωνιών
 - Ο κατακόρυφος άξονας $j\omega$ (συχνότητες) γίνεται κύκλος
 - Κάθε συχνότητα f αντιστοιχεί σε μια γωνία:

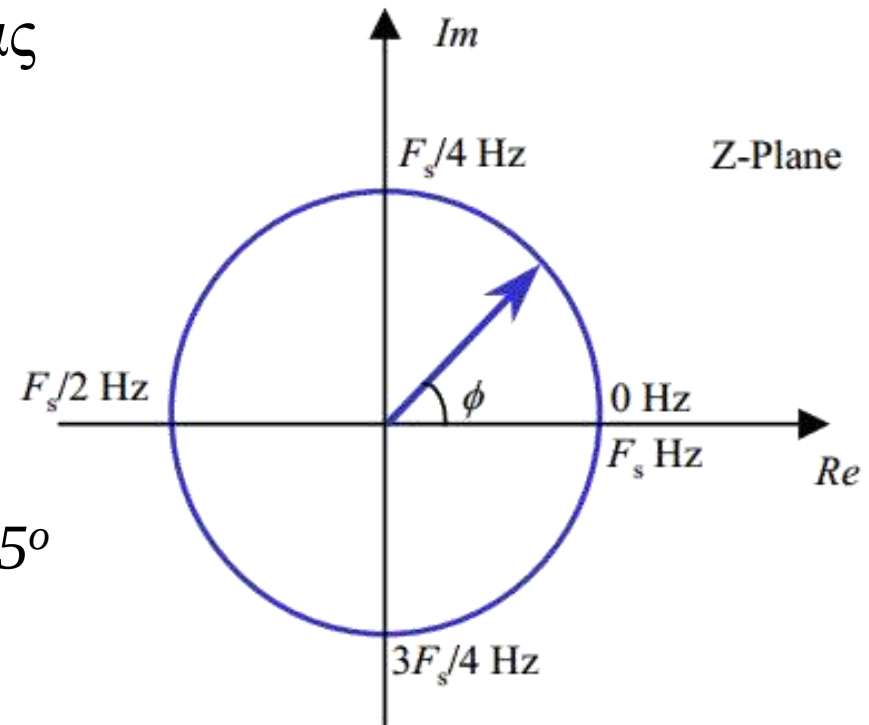
$$\varphi = \frac{2\pi f}{F_s} \text{ rad}$$

F_s η συχνότητα δειγματοληψίας

Παράδειγμα:

για $F_s = 40 \text{ kHz}$ και $f = 5 \text{ kHz}$

γωνία $\varphi = 2\pi \cdot \frac{5}{40} = 0.25\pi \text{ rad}$ ή 45°



ZT βασικών ακολουθιών

Ακολουθία	Μετασχηματισμός	Περιοχή σύγκλισης
$\delta(n)$	1	Όλες οι τιμές του Z
$a^n \cdot u(n)$	$\frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}}$	$ z > a $
$-a^n \cdot u(-n-1)$	$\frac{1}{1 - a \cdot z^{-1}}$	$ z < a $
$n \cdot a^n \cdot u(n)$	$\frac{a \cdot z^{-1}}{(1 - a \cdot z^{-1})^2}$	$ z > a $
$-n \cdot a^n \cdot u(-n-1)$	$\frac{a \cdot z^{-1}}{(1 - a \cdot z^{-1})^2}$	$ z < a $
$\cos(n \cdot \omega_0) \cdot u(n)$	$\frac{1 - (\cos \omega_0) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot (\cos \omega_0) \cdot z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$
$\sin(n \cdot \omega_0) \cdot u(n)$	$\frac{(\sin \omega_0) \cdot z^{-1}}{1 - 2 \cdot (\cos \omega_0) \cdot z^{-1} + z^{-2}}$	$ z > 1$

Ιδιότητες του ΖΤ

Ιδιότητα	Ακολουθία	Μετασχηματισμός z	Περιοχή σύγκλισης
Γραμμικότητα	$a \cdot x(n) + b \cdot y(n)$	$a \cdot X(z) + b \cdot Y(z)$	Περιέχει $R_x \cap R_y$
Μετατόπιση	$x(n - n_0)$	$z^{-n_0} \cdot X(z)$	R_x
Αντιστροφή στο χρόνο	$x(-n)$	$X(z^{-1})$	$\frac{1}{R_x}$
Πολλαπλασιασμός με εκθετική ακολουθία	$a \cdot^n x(n)$	$X(a^{-1} \cdot z)$	$ a \cdot R_x$
Συνέλιξη	$x(n) * y(n)$	$X(z) \cdot Y(z)$	Περιέχει $R_x \cap R_y$
Μιγαδική συζυγία	$x^*(n)$	$X^*(z^*)$	R_x
Παράγωγος	$n \cdot x(n)$	$-z \frac{dX(z)}{dz}$	R_x

Θεώρημα αρχικής τιμής: $x(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$

Ανάλυση συστημάτων με ZT

- Με χρήση του θεωρήματος της συνέλιξης για το ZT ισχύει:

$$y(n) = h(n) * x(n) \xleftrightarrow{ZT} Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

- $H(z)$ είναι ο ZT της κρουστικής απόκρισης $h(n)$ του συστήματος και καλείται **συνάρτηση μεταφοράς** του συστήματος
- Από την μελέτη της συνάρτησης μεταφοράς ενός LSI είναι δυνατόν
 - να **χαρακτηρισθεί** αυτό ως προς την αιτιότητα, την ευστάθεια και άλλα χαρακτηριστικά του και
 - να **μελετηθούν** διάφοροι ειδικοί τύποι LSI όπως συστήματα γραμμικής και ελάχιστης φάσης, φίλτρα και κυκλώματα ανάδρασης.
 - με το μετασχηματισμό Z διευκολύνεται και βελτιστοποιείται ο **σχεδιασμός** ενός συστήματος

Συνάρτηση μεταφοράς

- Αν $h(n)$ η κρουστική απόκριση LSI συστήματος, η **συνάρτηση μεταφοράς** του δίνεται από τη σχέση:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot z^{-n}$$

- Εφόσον ισχύει (από το θεώρημα συνέλιξης) ότι:

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

- Η συνάρτηση μεταφοράς μπορεί να υπολογιστεί από:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Συνάρτηση μεταφοράς

- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

- Η συνάρτηση μεταφοράς του LSI συστήματος
$$y(n) - 2y(n - 1) = x(n) - 3.5x(n - 2)$$

- μπορεί να βρεθεί (χρήση της ιδ. μετατόπισης του ZT):

$$\begin{aligned} Y(z) - 2z^{-1}Y(z) &= X(z) - 3.5z^{-2}X(z) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} &= \frac{1 - 3.5z^{-2}}{1 - 2z^{-1}} \Rightarrow H(z) = \frac{1 - 3.5z^{-2}}{1 - 2z^{-1}} \end{aligned}$$

Συνάρτηση μεταφοράς

- Γενικά για ένα LSI σύστημα που περιγράφεται από τη σχέση:

$$\sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \alpha_{\lambda} \cdot y(n - \lambda) = \sum_{k=0}^K \beta_k \cdot x(n - k)$$

- Η συνάρτηση μεταφοράς θα είναι:

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^K \beta_k \cdot z^{-k}}{\sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \alpha_{\lambda} \cdot z^{-\lambda}} = \frac{\beta_0 z^0 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_K z^{-K}}{\alpha_0 z^0 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_{\Lambda} z^{-\Lambda}}$$

- Με παραγοντοποίηση προκύπτει:

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^K (1 - \rho_k \cdot z^{-1})}{\prod_{\lambda=1}^{\Lambda} (1 - \rho_{\lambda} \cdot z^{-1})}, A = \frac{\beta_0}{\alpha_0}, \rho \text{ οι ρίζες των πολυωνύμων}$$

- Σε ρητή $H(z)$, οι ρίζες του αριθμητή ονομάζονται *μηδενικά* και οι ρίζες του παρονομαστή *πόλοι*

Ανάλυση συστημάτων

- Χρήση του MZ για την ανάλυση συστημάτων

- **Αιτιατότητα (causality)**

- Αιτιατό ένα σύστημα του οποίου η έξοδος δεν εξαρτάται από «μελλοντικές» τιμές της εισόδου

$$y[n] = \sum_{k=0}^K c_k \cdot x[n - k], \quad c_k \in R$$

- **BIBO ευστάθεια**

- BIBO ευσταθές ένα σύστημα στο οποίο μια απολύτως φραγμένη είσοδος (bounded input) οδηγεί σε απολύτως φραγμένη έξοδο (bounded output)

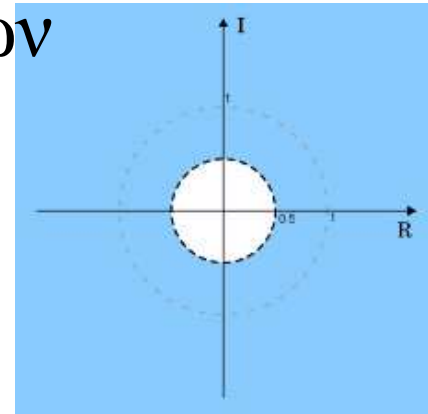
$$\exists A \in R: |x[n]| \leq A \Rightarrow \exists B \in R: |T\{x[n]\}| \leq B, \quad \forall n \in Z$$

Αιτιατότητα

- Έλεγχος της αιτιότητας LSI συστήματος
 - Κρουστική απόκριση $h(n)$ αιτιατού συστήματος
 - Είναι ακολουθία δεξιάς πλευράς, $h(n)=0, n<0$
 - Συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n) \cdot z^{-n}$$

- Περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς ενός αιτιατού LTI συστήματος είναι όλη η περιοχή του μιγαδικού επιπέδου έξω από τον κύκλο των εσωτερικών ορίων της



Αιτιατότητα

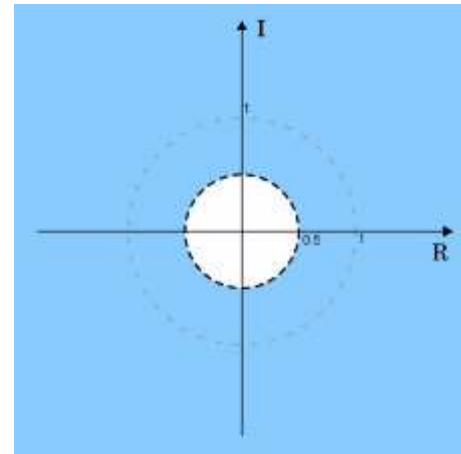
- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

- Έστω η ακολουθία $x[n] = 0.5^n u[n]$

- Ο ZT της ακολουθίας είναι:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 0.5^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{0.5}{z}\right)^n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

- Η τελική σχέση προκύπτει από τις γεωμετρικές σειρές και ισχύει μόνο εάν $|0.5z^{-1}| < 1$ ή διαφορετικά $|z| > 0.5$



Ευστάθεια

- Ικανή και αναγκαία συνθήκη για την **BIBO ευστάθεια** ενός συστήματος είναι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \in R$$

- Αν $|z|=1$ (μοναδιαίος κύκλος) τότε

$$|H(z)| = \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) \cdot z^{-1} \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n) \cdot z^{-1}| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \in R$$

- Ένα LTI σύστημα είναι BIBO ευσταθές αν και μόνο αν η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς **περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο**

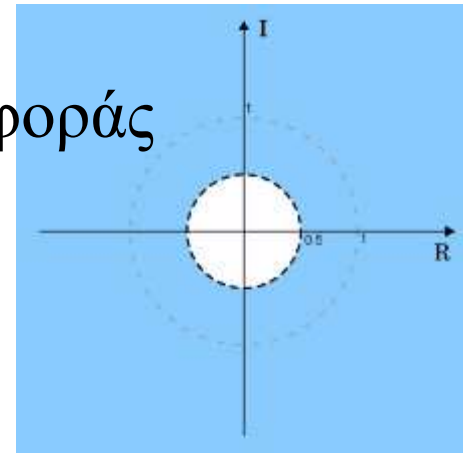
- ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

- Έστω η ακολουθία $x[n] = 0.5^n u[n]$

- Ο ZT της ακολουθίας είναι:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} 0.5^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{0.5}{z}\right)^n \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X(z) = \frac{1}{1 - 0.5z^{-1}}$$

- Η τελική σχέση προκύπτει από τις γεωμετρικές σειρές και ισχύει μόνο εάν $|0.5z^{-1}| < 1$ ή διαφορετικά $|z| > 0.5$
- Η περιοχή σύγκλισης της συνάρτησης μεταφοράς
 - Περιλαμβάνει το μοναδιαίο κύκλο
- Το LSI σύστημα είναι BIBO ευσταθές



Πραγματοποιήσιμα συστήματα

- Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα LSI σύστημα **αιτιατό και ευσταθές** είναι όλοι **οι πόλοι** του να βρίσκονται **εντός του μοναδιαίου κύκλου**

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^K (1 - \rho_k \cdot z^{-1})}{\prod_{\lambda=1}^L (1 - \rho_\lambda \cdot z^{-1})}, \quad \rho_\lambda \text{ οι πόλοι}$$

- Ένα σύστημα που είναι αιτιατό και ευσταθές λέγεται **πραγματοποιήσιμο**

$$\text{ROC}\{H(z)\}: |z| > \rho_\lambda, \quad 0 \leq \rho_\lambda < 1$$

Πραγματοποιήσιμα συστήματα

- Ένα **σύστημα πρώτου βαθμού** έχει συνάρτηση μεταφοράς της μορφής:

$$H(z) = \frac{b_0}{1 + a_1 z^{-1}}$$

- Το σύστημα αυτό είναι **πραγματοποιήσιμο**
αν και μόνο αν

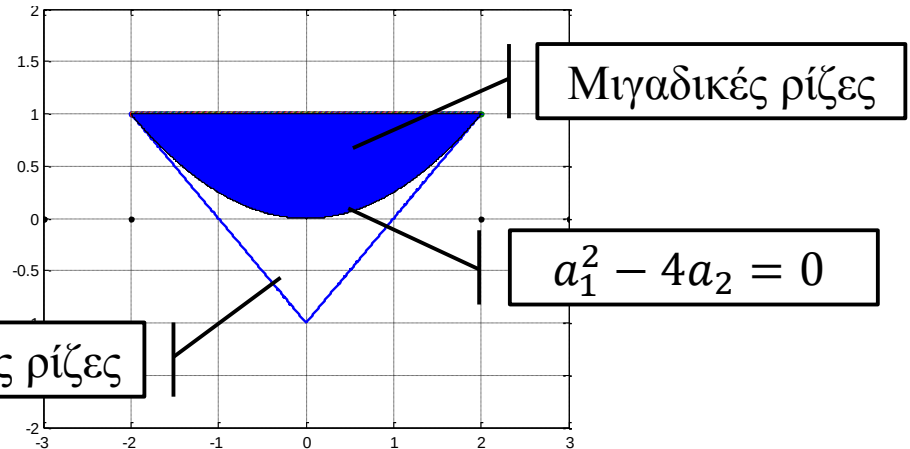
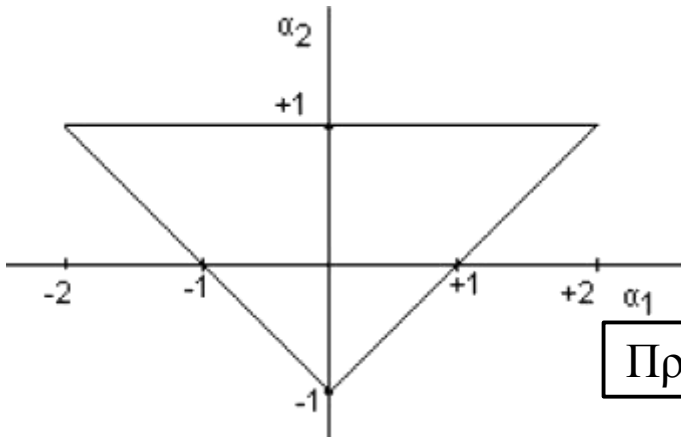
$$|z| > a_1, \quad 0 \leq a_1 < 1$$

Πραγματοποιήσιμα συστήματα

- Αν ο παρονομαστής της ρητής συνάρτησης μεταφοράς είναι **δευτέρου** βαθμού **είναι δυνατό να ελέγξουμε** αν οι ρίζες του (πόλοι) είναι εντός του μοναδιαίου κύκλου **χωρίς να τις υπολογίσουμε**
 - Από το πολυώνυμο του παρονομαστή ($D(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$), τις απαιτήσεις ευστάθειας και αιτιατότητας καθώς και τους τύπους του François Viète (Vieta, 1540-1603)

$$x_+ + x_- = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad x_+ \cdot x_- = \frac{\gamma}{\alpha} \quad \xRightarrow{D(z)} \rho_1 \cdot \rho_2 = a_2$$

- αποδεικνύεται ότι στο καρτεσιανό επίπεδο με οριζόντιο άξονα τις τιμές του a_1 και κάθετο άξονα τις τιμές του a_2 , το σύστημα είναι πραγματοποιήσιμο όταν το σημείο (a_1, a_2) βρίσκεται στο εσωτερικό του **τριγώνου ευστάθειας**



Απόκριση συχνότητας

- Ο λόγος για τον οποίο χρειάζεται η κατανόηση των διαγραμμάτων πόλων-μηδενικών είναι ότι
 - βοηθούν στη σχεδίαση φίλτρων και την εκτίμηση της συνάρτησης μεταφοράς
 - βοηθούν στην κατανόηση της απόκρισης συχνότητας (πλάτος-φάση) με βάση τη θέση των πόλων-μηδενικών

Εκτίμηση της απόκρισης συχνότητας

- Αν η συνάρτηση του συστήματος είναι της μορφής

$$H(z) = A \frac{\prod_{k=1}^K (1 - \rho_k \cdot z^{-1})}{\prod_{\lambda=1}^{\Lambda} (1 - \rho_{\lambda} \cdot z^{-1})}$$

- και ο μοναδιαίος κύκλος βρίσκεται στην περιοχή σύγκλισής της, **η απόκριση συχνότητας** προκύπτει αν τεθεί **$z = e^{j\omega}$**

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= A \frac{\prod_{k=1}^K (1 - \rho_k \cdot e^{-j\omega})}{\prod_{\lambda=1}^{\Lambda} (1 - \rho_{\lambda} \cdot e^{-j\omega})} \\ &= A \cdot e^{j\omega(\Lambda-K)} \frac{\prod_{k=1}^K (e^{j\omega} - \rho_k)}{\prod_{\lambda=1}^{\Lambda} (e^{j\omega} - \rho_{\lambda})} \end{aligned}$$

Εκτίμηση της απόκρισης συχνότητας

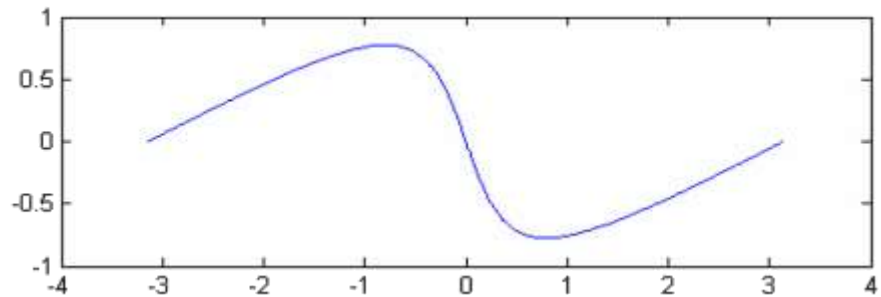
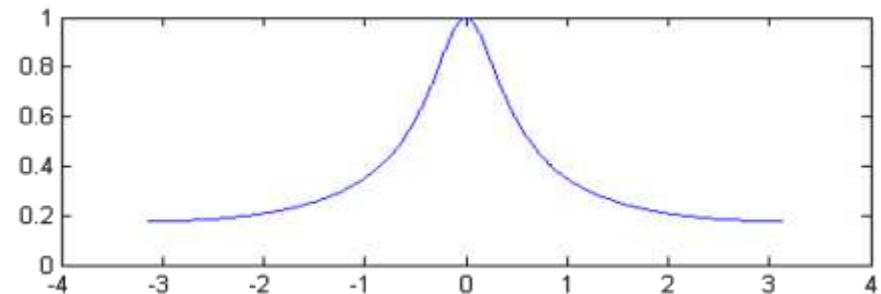
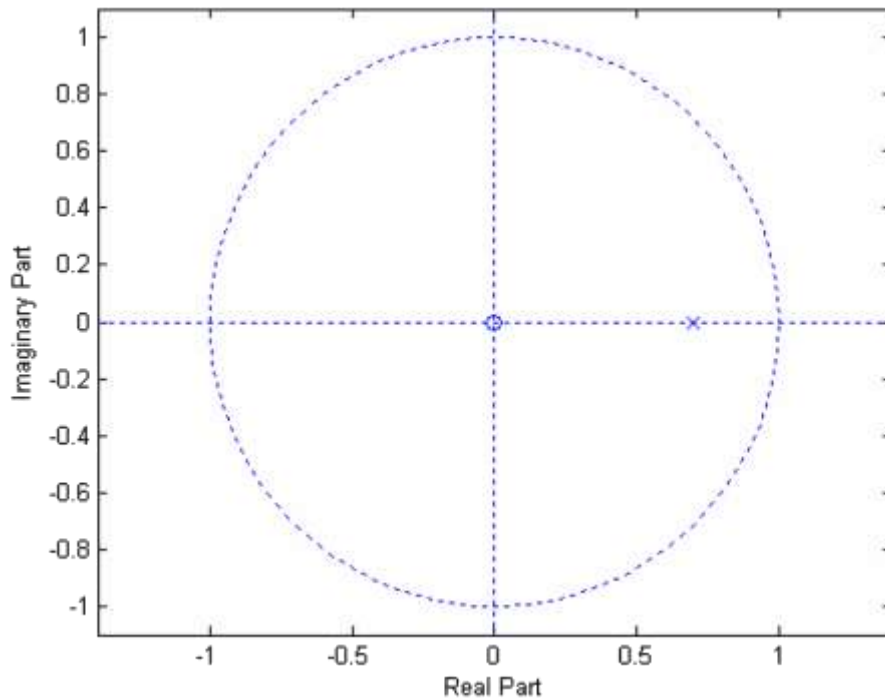
- Από τη μελέτη του πλάτους και της φάσης μέσω της έκφρασης του $H(e^{j\omega})$ προκύπτουν τα εξής:
 - Ένας πόλος της συνάρτησης μεταφοράς **συμβάλει στην αύξηση του πλάτους και της φάσης** της απόκρισης συχνότητας όσο η κυκλική συχνότητα πλησιάζει τη γωνία του πόλου
 - Ένα μηδενικό της συνάρτησης μεταφοράς **συμβάλει στη μείωση του πλάτους και της φάσης** της απόκρισης συχνότητας όσο η κυκλική συχνότητα πλησιάζει τη γωνία του μηδενικού

Πόλοι-μηδενικά και απόκριση

- Το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{0.2}{1 - 0.8z^{-1}}$$

- έχει πόλο το 0.8 ($\rightarrow \varphi_p = 0 \rightarrow$ μεγιστοποίηση πλάτους στο 0)

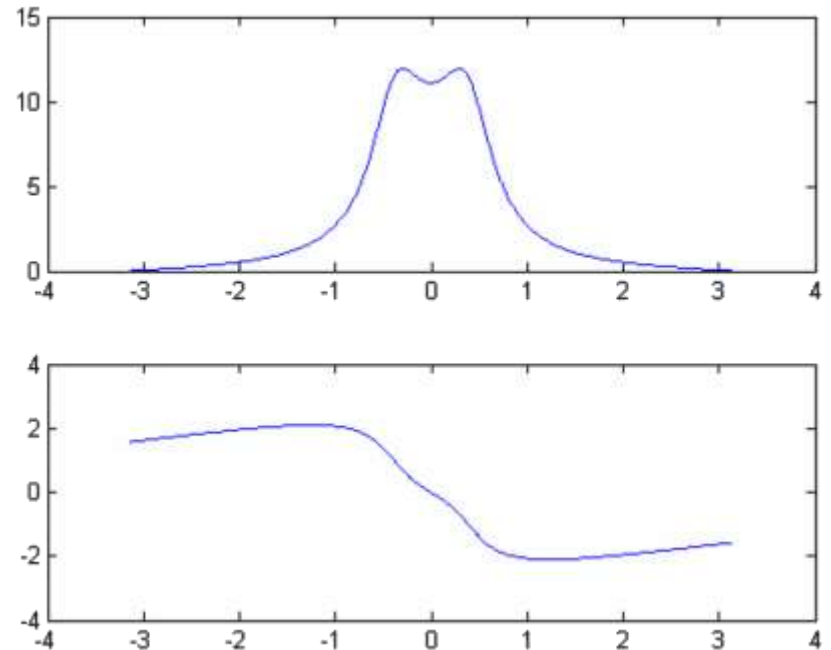
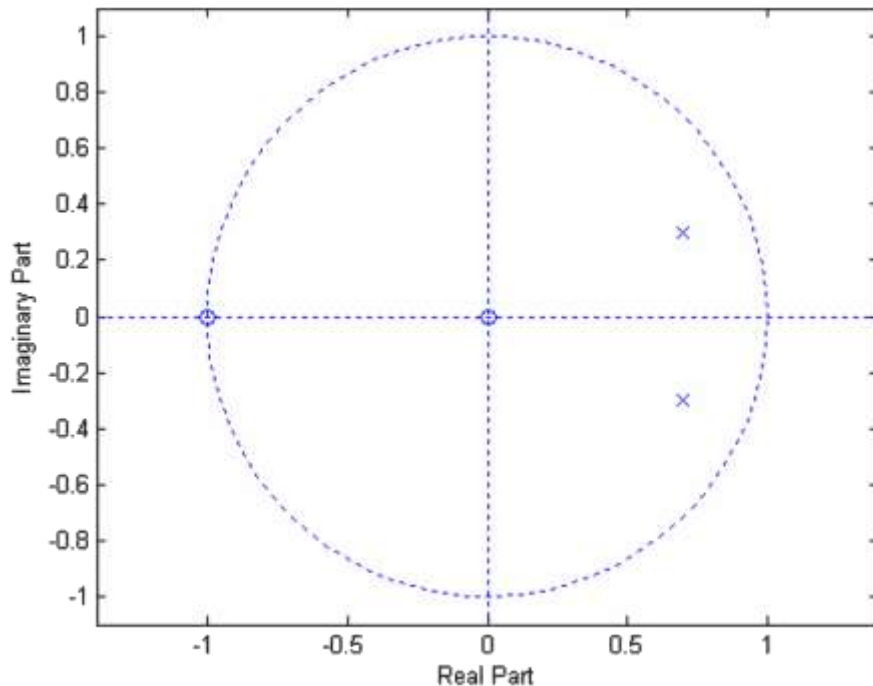


Πόλοι-μηδενικά και απόκριση

- Το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 1.4z^{-1} + 0.58z^{-2}}$$

- έχει πόλους $0.7+0.3j$ και $0.7-0.3j$ και μηδενικό το -1
 - $\varphi_{p1,p2} = \pm 0.405 \rightarrow$ μεγιστοποίηση πλάτους στο ± 0.405
 - $\varphi_z = 0 \rightarrow$ μείωση πλάτους στο 0

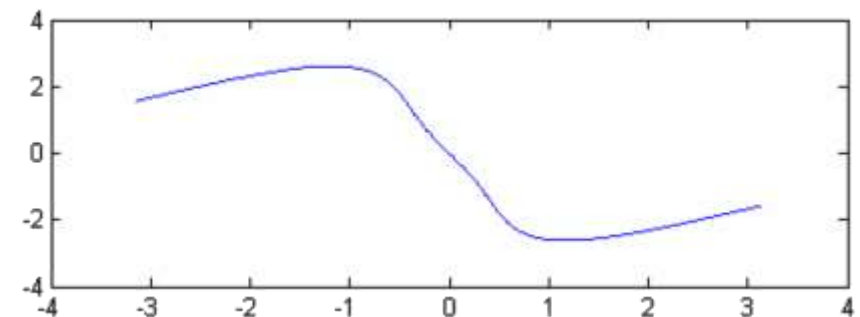
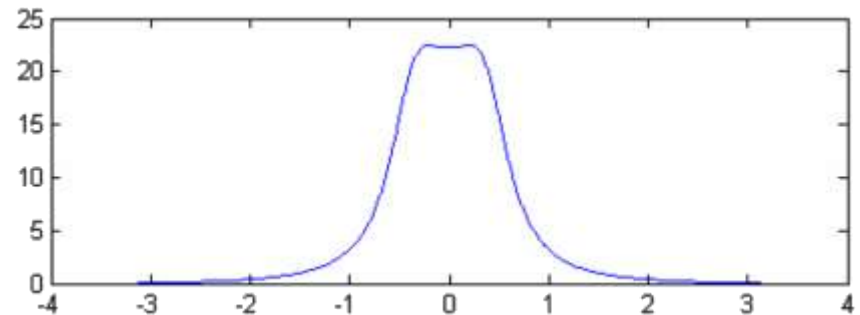
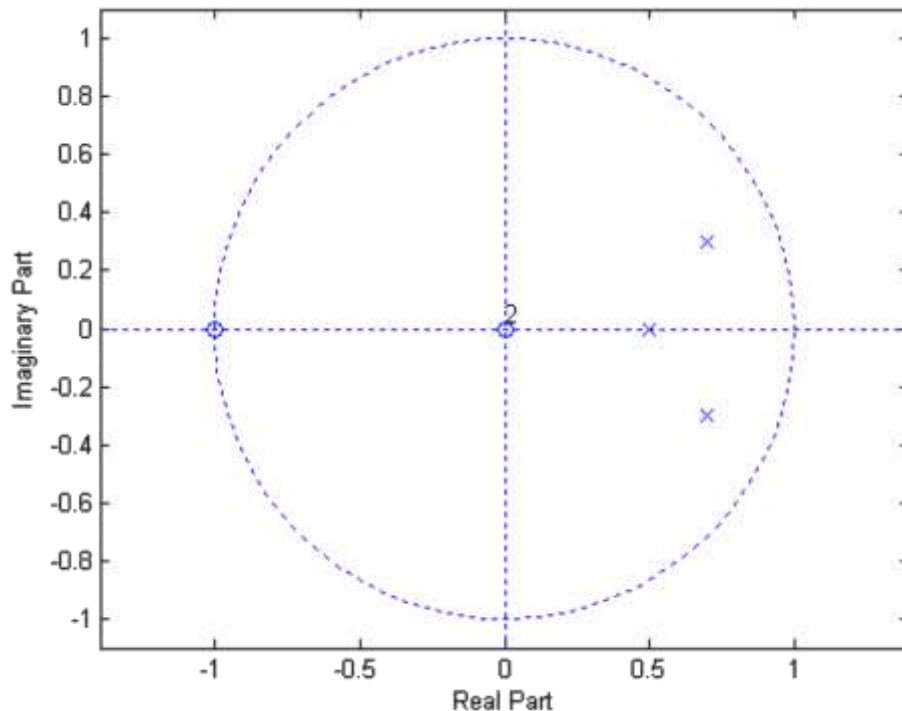


Πόλοι-μηδενικά και απόκριση

- Το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 1.9z^{-1} + 1.28z^{-2} - 0.29z^{-3}}$$

- έχει πόλους $0.7+0.5j$, $0.7-0.5j$, 0.5 και μηδενικό το -1
 - $\varphi_{p1,p2} = \pm 0.62 \rightarrow$ μεγιστοποίηση πλάτους στο ± 0.62
 - $\varphi_z = 0 \rightarrow$ μείωση πλάτους στο 0



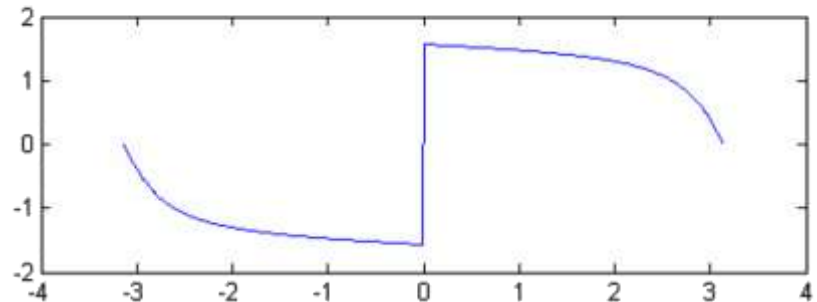
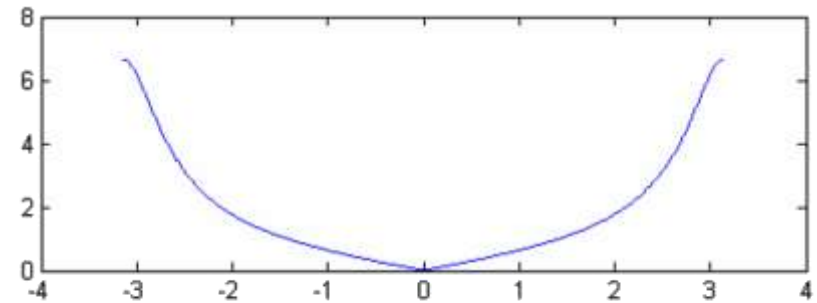
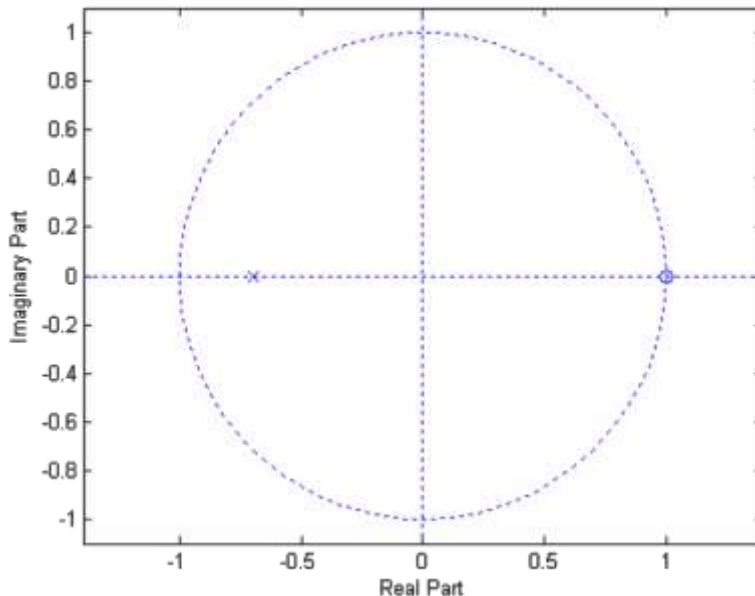
Πόλοι-μηδενικά και απόκριση

- Συστήματα με **πόλους και μηδενικά σε θέσεις αντίθετες** από αυτές των χαμηλοπερατών φίλτρων είναι φίλτρα υψηπερατά

- Το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{0.2}{1 + 0.8z^{-1}}$$

- έχει πόλο -0.8



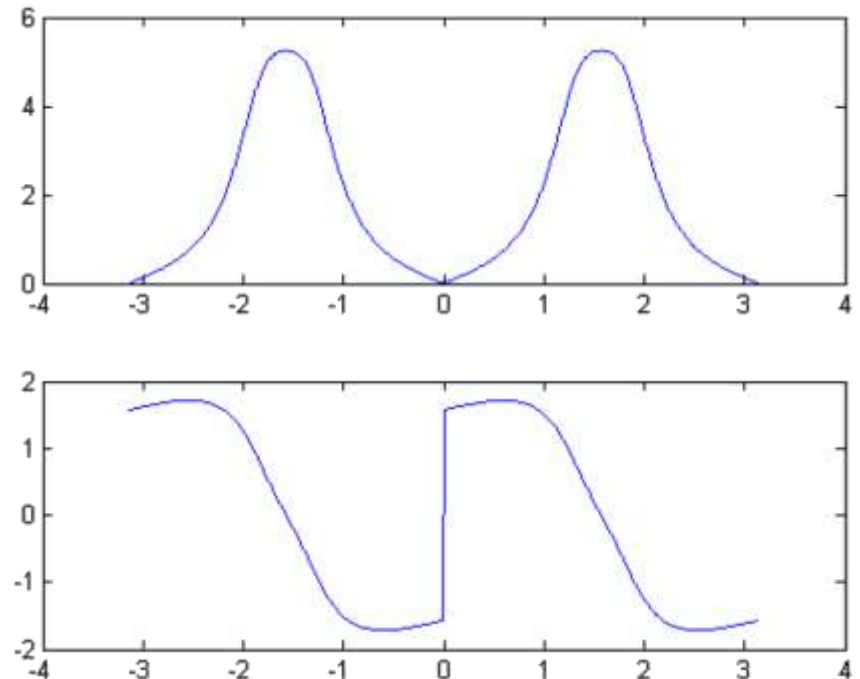
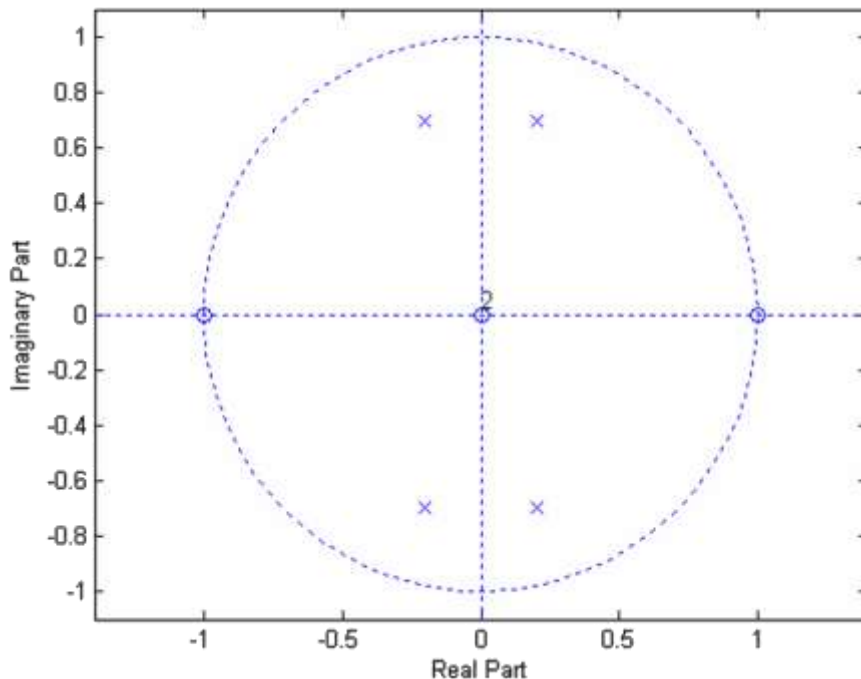
Πόλοι-μηδενικά και απόκριση

- Συστήματα με **πόλους κοντά στο φανταστικό άξονα** λειτουργούν ως **ζωνοπερατά** φίλτρα

- Το σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 + 0.49z^{-2} + 0.2809z^{-4}}$$

- έχει πόλους τα $\pm 0.2 \pm 0.7j$ και μηδενικά τα ± 1



Χαμηλοπερατό-υψηπερατό φίλτρο

- Αποδεικνύεται ότι **αρκεί να αλλάξουμε να πρόσημα** των συντελεστών των **περιττών δυνάμεων** στα πολυώνυμα της απόκρισης συχνότητας του ενός φίλτρου για να προκύψει η απόκριση συχνότητας του άλλου

- Για παράδειγμα το σύστημα με απόκριση συχνότητας

$$H_x(e^{j\omega}) = \frac{1 + e^{-j\omega}}{1 - 1.9e^{-j\omega} + 1.28e^{-2j\omega} - 0.29e^{-3j\omega}}$$

- είναι χαμηλοπερατό, ενώ το σύστημα με απόκριση

$$H_y(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega}}{1 + 1.9e^{-j\omega} + 1.28e^{-2j\omega} + 0.29e^{-3j\omega}}$$

- είναι υψηπερατό

Απόκριση συχνότητας

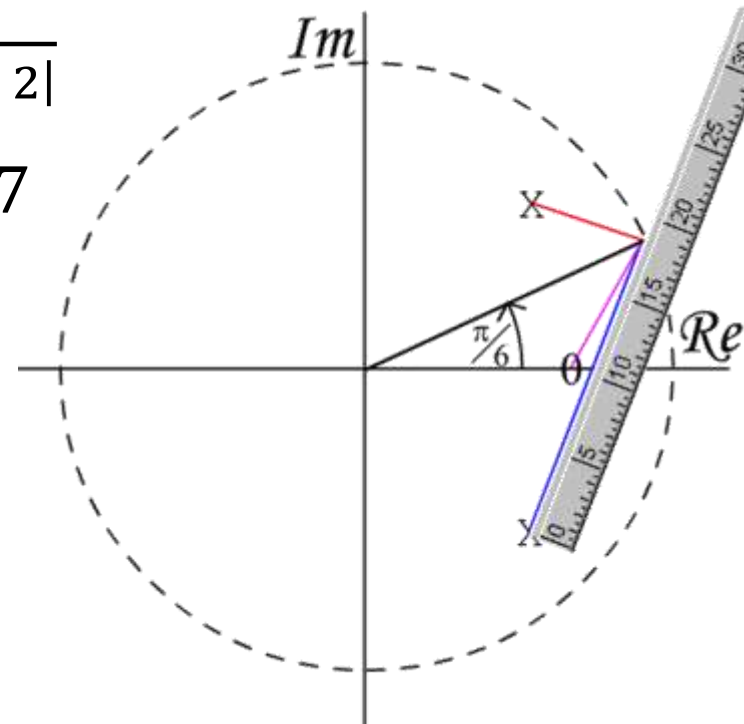
- **Διανυσματικός υπολογισμός πλάτους** από το Z-plane:

- Για δεδομένη συχνότητα ω (π.χ. $\pi/6$)
- Μέτρηση του μήκους κάθε τμήματος από κάθε πόλο-μηδενικό στο σημείο της συχνότητας πάνω στον κύκλο
- Εκτίμηση του πλάτους από:

$$H(\omega) = \frac{|zero\ vector|}{|pole\ vector\ 1||pole\ vector\ 2|}$$

$$\Rightarrow H\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0.0677$$

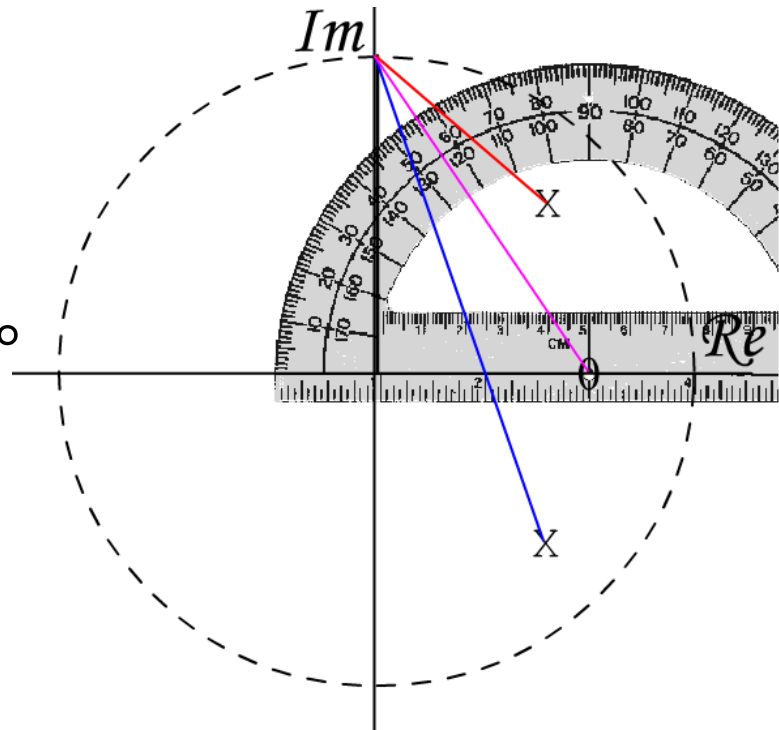
- Σχεδίαση πλάτους $[0, 2\pi]$
- Επανάληψη για όλα τα ω



Απόκριση συχνότητας

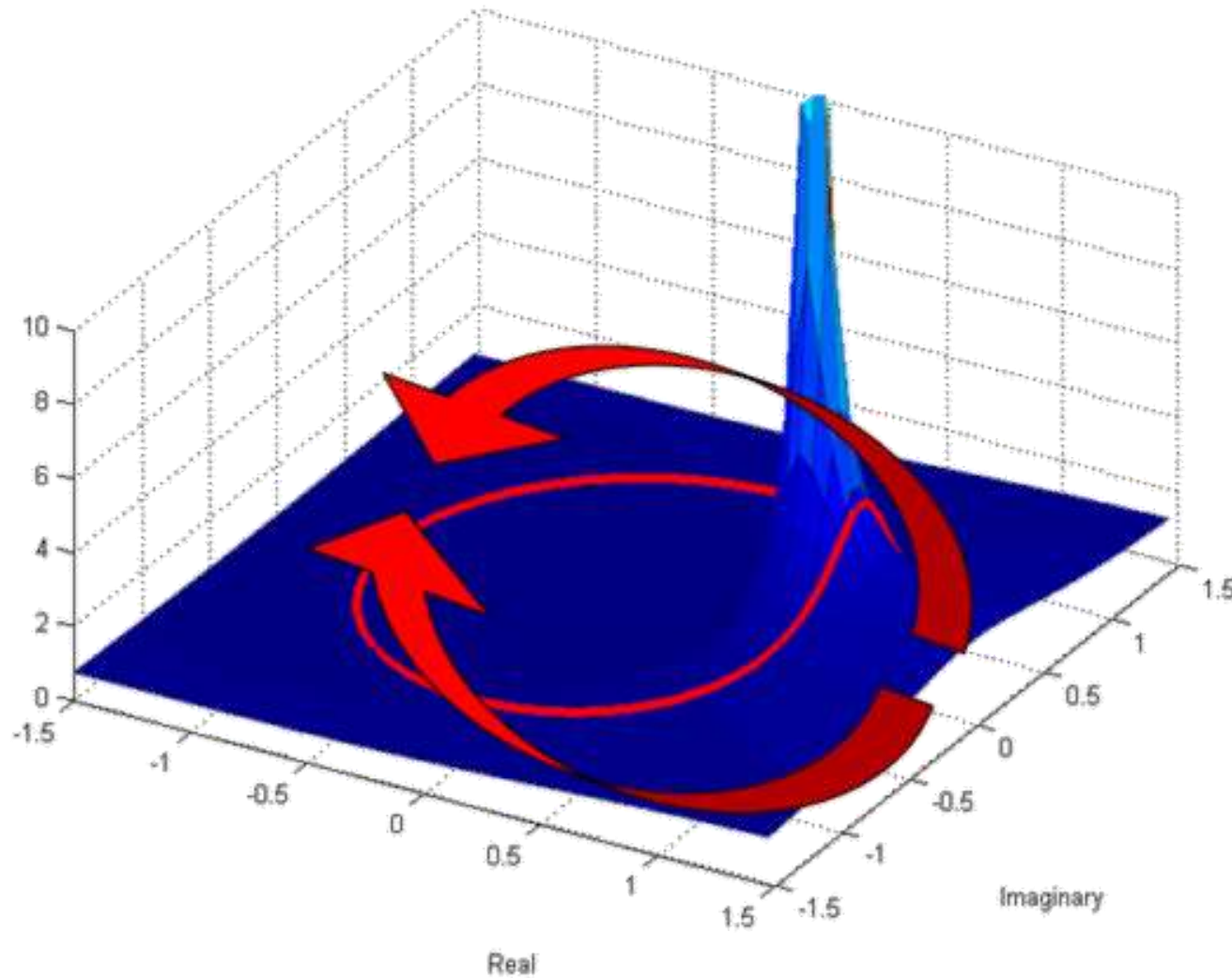
- **Διανυσματικός υπολογισμός φάσης** από το Z-plane:
 - Για δεδομένη συχνότητα ω (π.χ. $\pi/2$)
 - Μέτρηση της γωνίας κάθε τμήματος με τον οριζόντιο άξονα
 - Αθροίζουμε όλες τις γωνίες μηδενικών και αφαιρούμε τις γωνίες των πόλων
 - Γωνία μηδενικού = 124°
 - Γωνία πόλου 1 = 140°
 - Γωνία πόλου 2 = 109°
 - Εκτίμηση της φάσης από:
$$124^\circ - 140^\circ - 109^\circ = -125^\circ$$

ή -2.18 rad
 - Σχεδίαση φάσης $[0, 2\pi]$
 - Επανάληψη για όλα τα ω



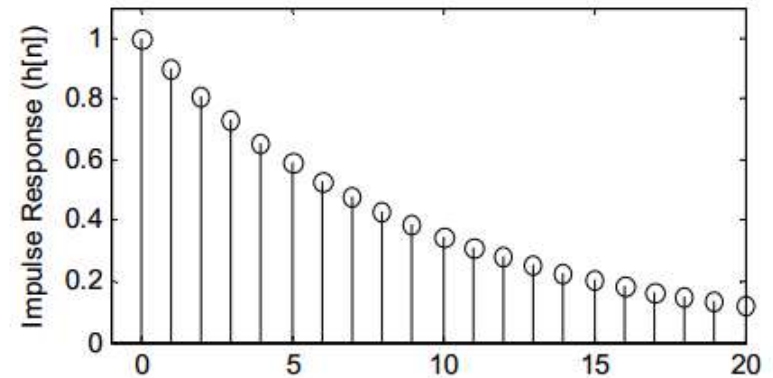
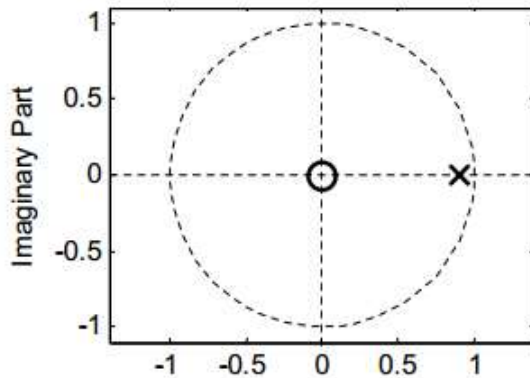
Απόκριση συχνότητας

- Τρισδιάστατη αναπαράσταση και εκτίμηση

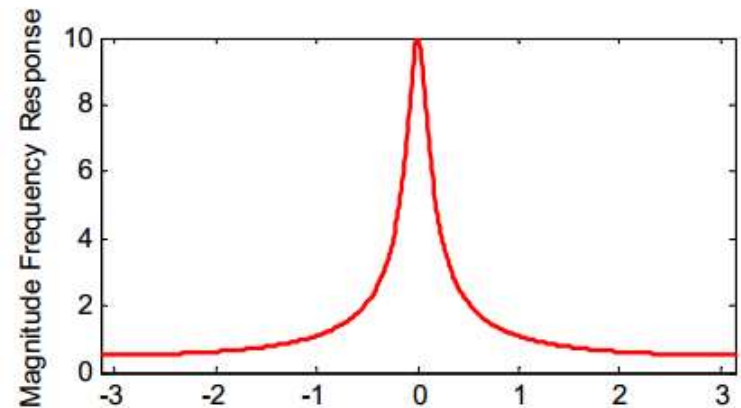
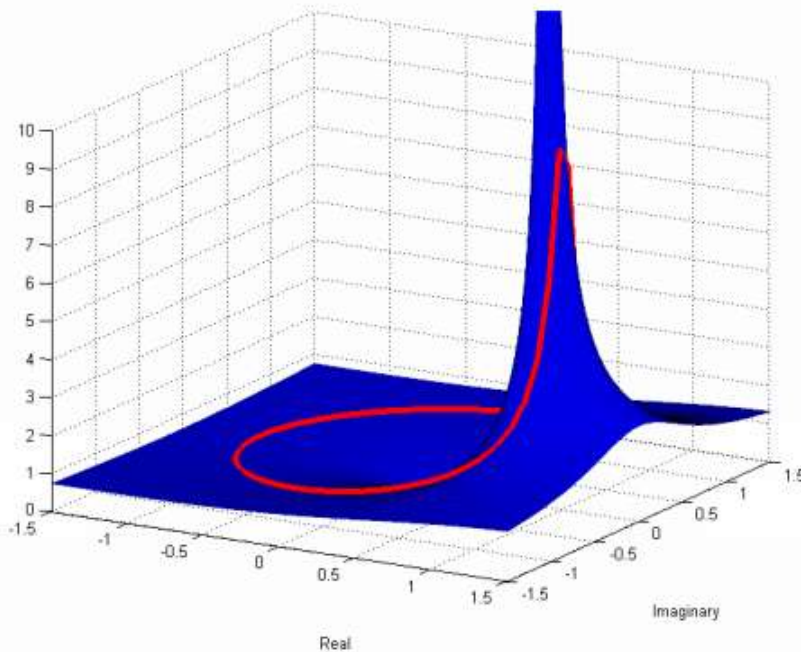


Απόκριση συχνότητας

- Τρισδιάστατη αναπαράσταση και εκτίμηση

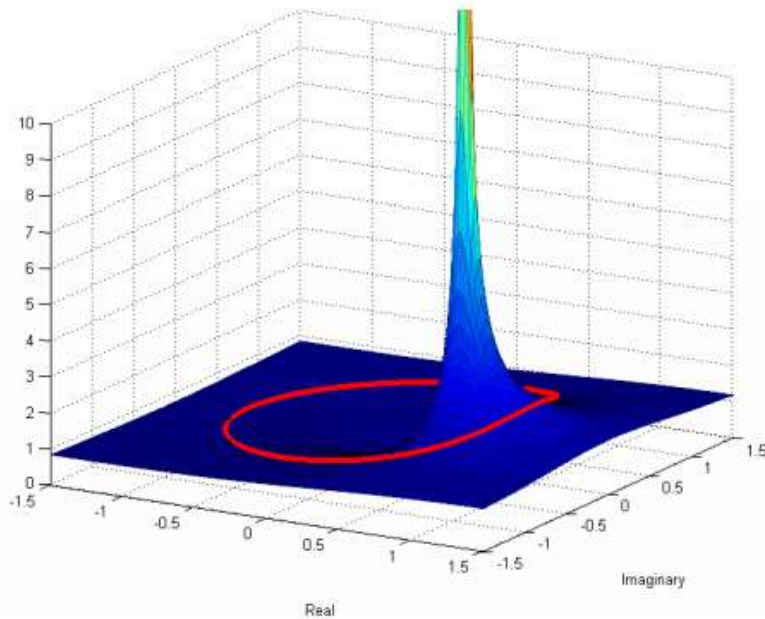
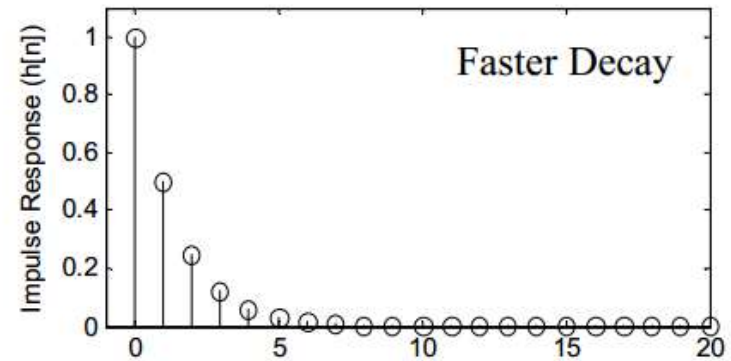
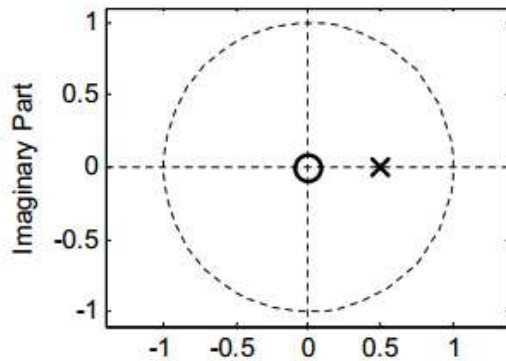


$$(0.9)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z-0.9}$$

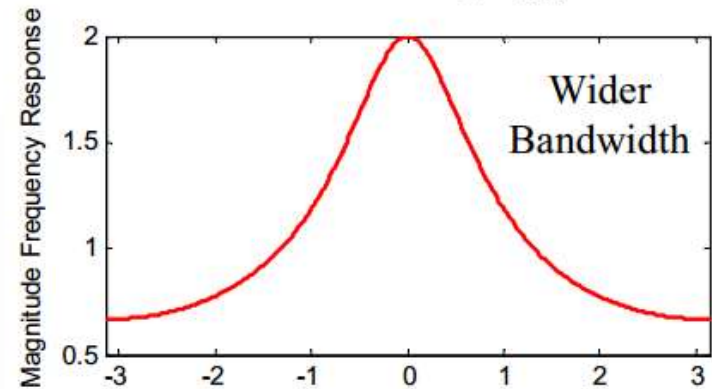


Απόκριση συχνότητας

- Τρισδιάστατη αναπαράσταση και εκτίμηση

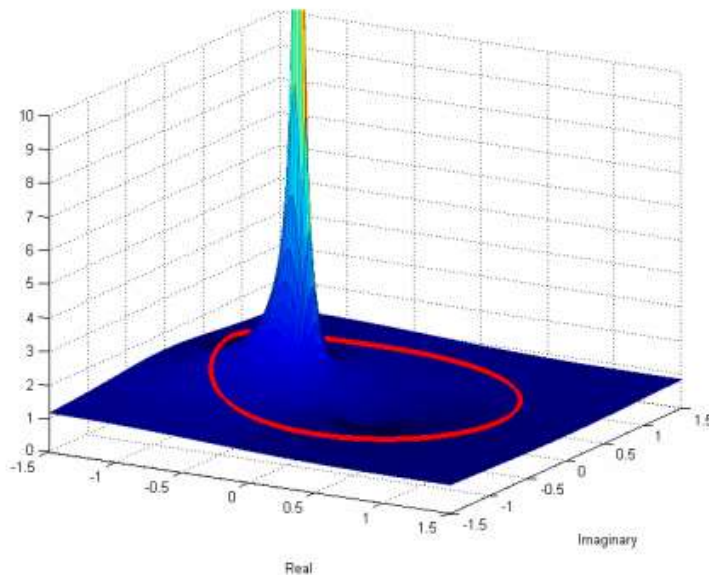
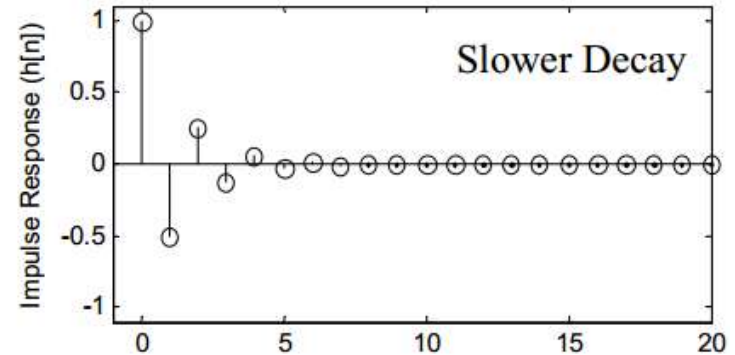
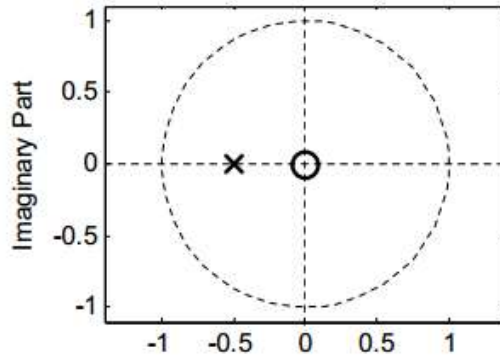


$$(0.5)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z - 0.5}$$

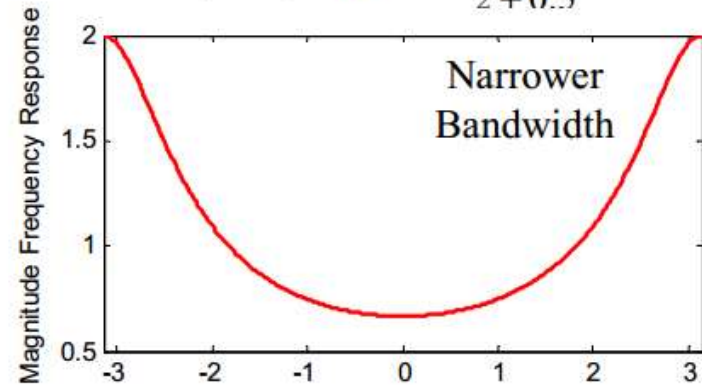


Απόκριση συχνότητας

- Τρισδιάστατη αναπαράσταση και εκτίμηση

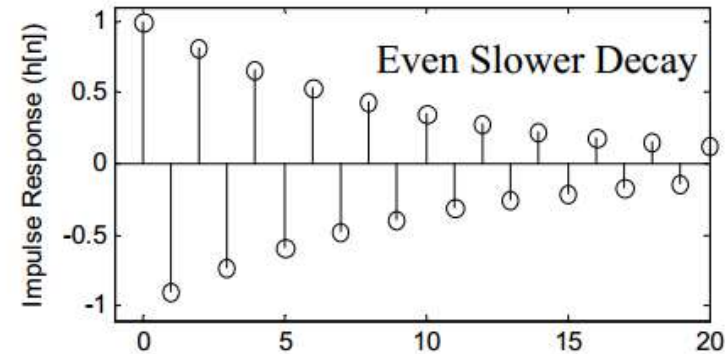
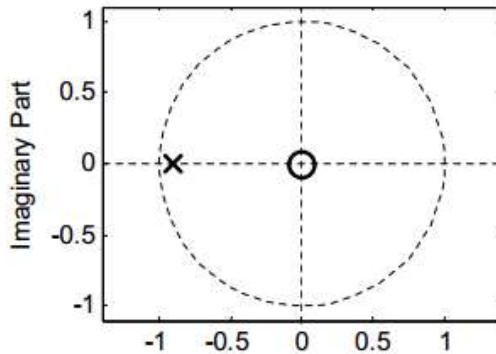


$$(-0.5)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z + 0.5}$$

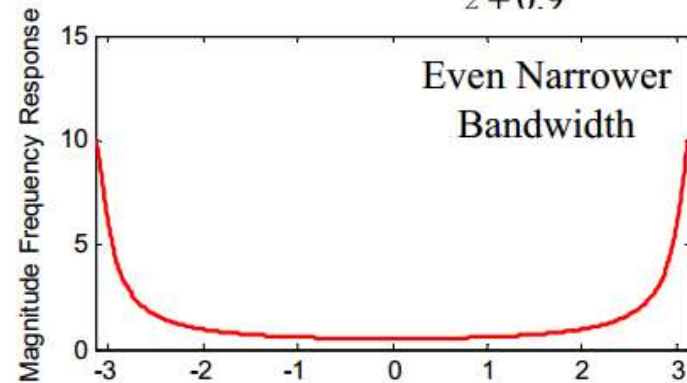
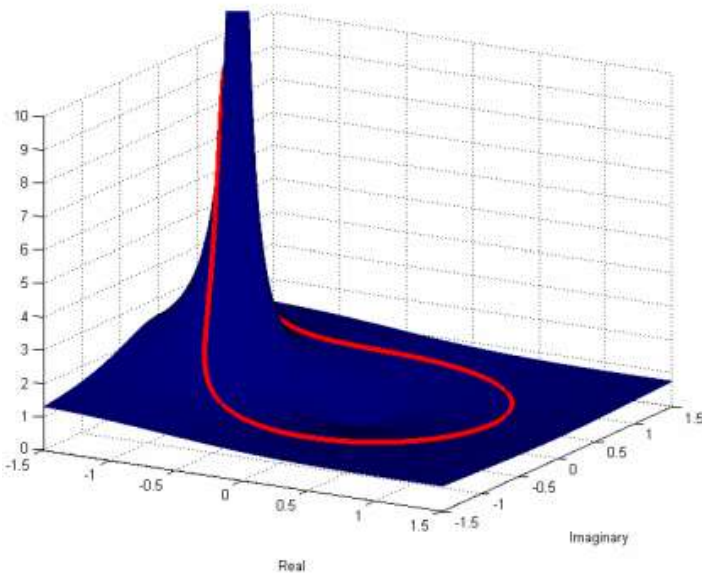


Απόκριση συχνότητας

- Τρισδιάστατη αναπαράσταση και εκτίμηση

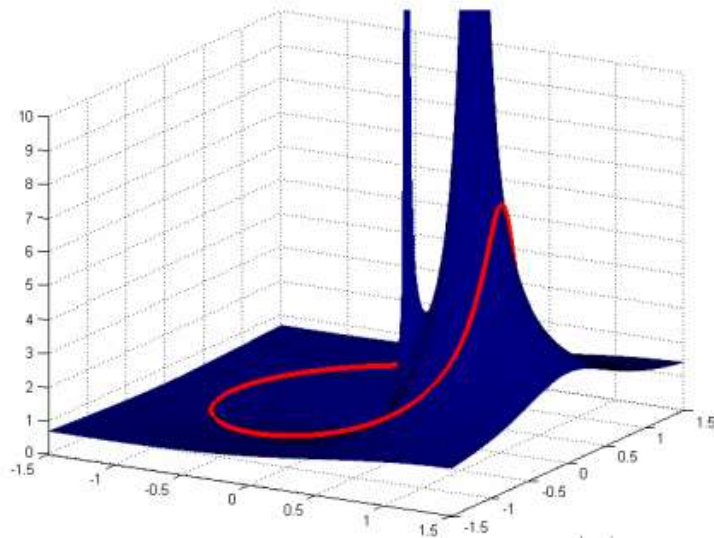
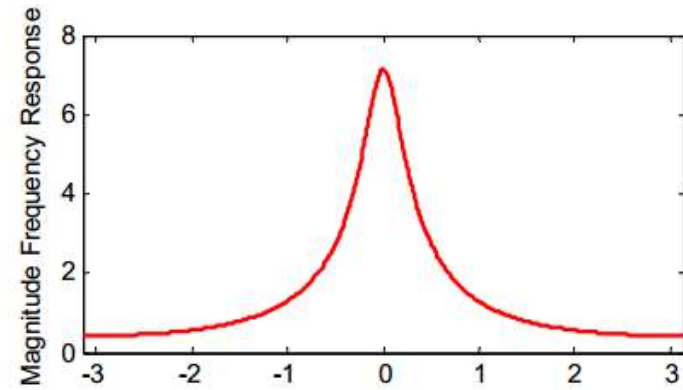
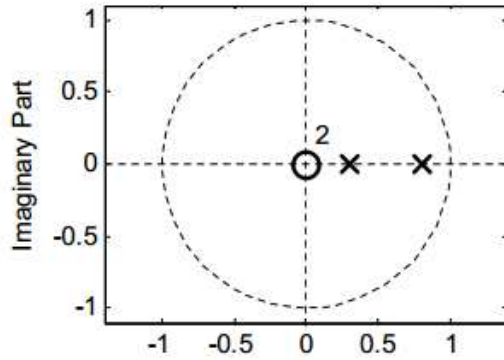


$$(-0.9)^n u[n] \longleftrightarrow \frac{z}{z + 0.9}$$

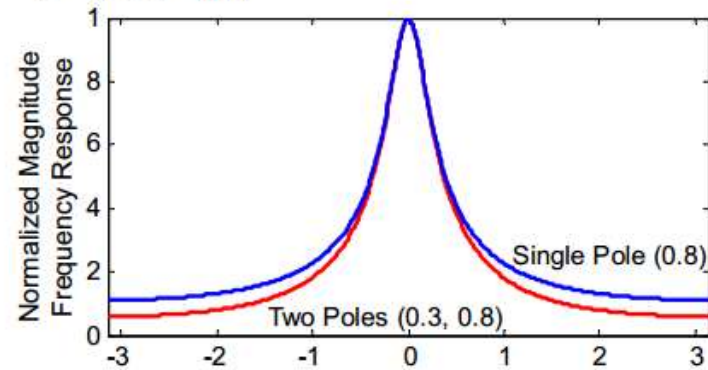


Απόκριση συχνότητας

- Τρισδιάστατη αναπαράσταση και εκτίμηση



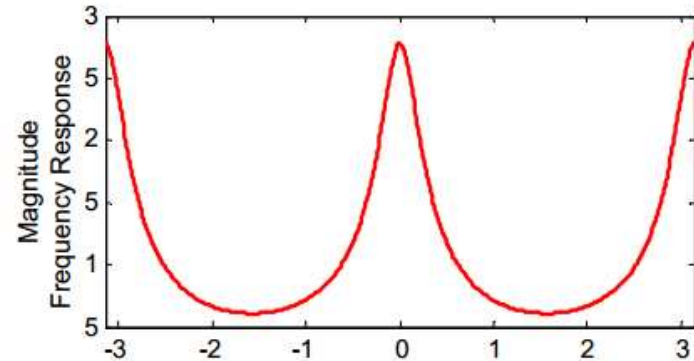
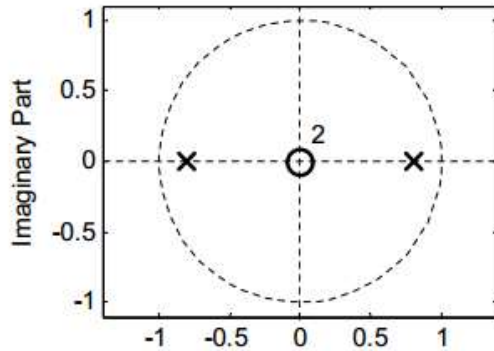
$$\frac{z}{z-0.3} \frac{z}{z-0.8} \longleftrightarrow k_1(0.3)^n u[n] + k_2(0.8)^n u[n]$$



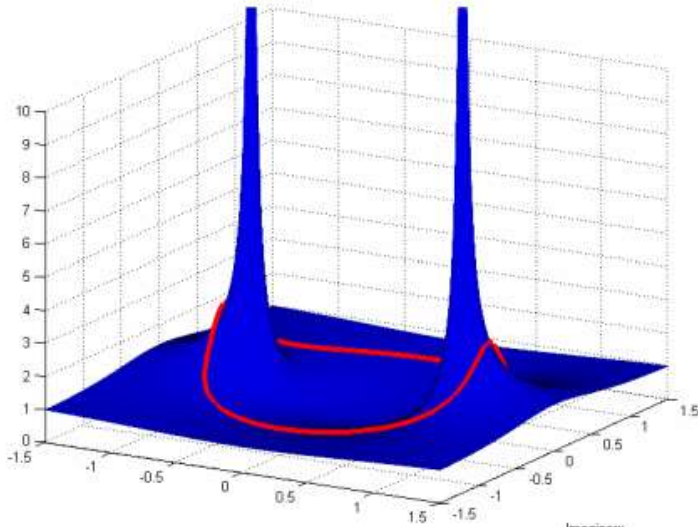
Pole with the slower response dominates

Απόκριση συχνότητας

- Τρισδιάστατη αναπαράσταση και εκτίμηση

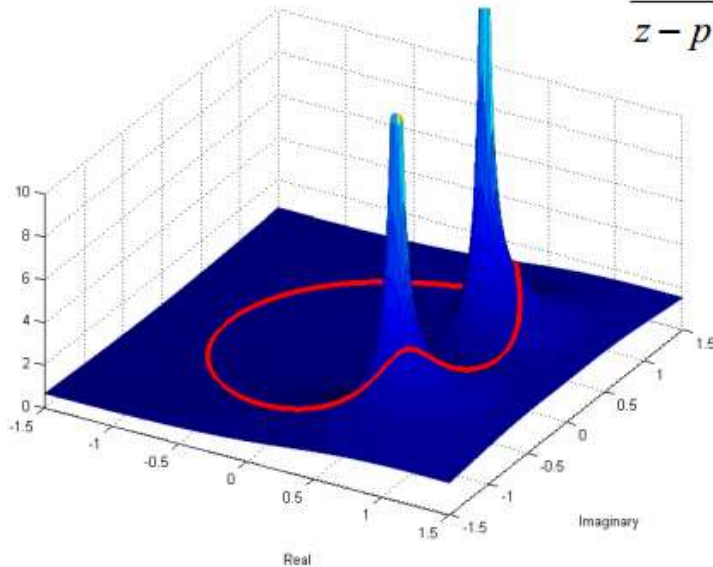
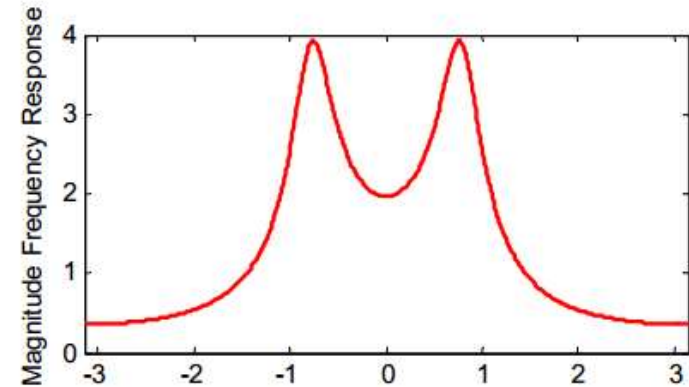
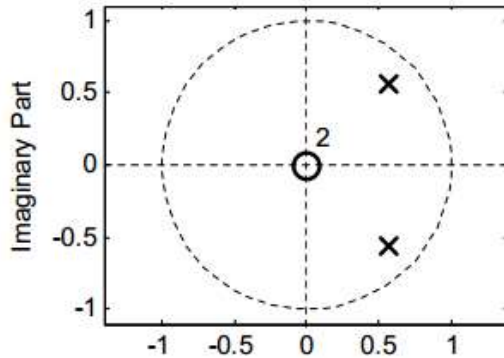


$$\frac{z}{z-0.8} \frac{z}{z+0.8} \longleftrightarrow k_1(0.8)^n u[n] + k_2(-0.8)^n u[n]$$



Απόκριση συχνότητας

- Τρισδιάστατη αναπαράσταση και εκτίμηση



$$\frac{z}{z-p} \frac{z}{z+p^*}$$

$$p, p^* = 0.566 \pm j0.566$$

$$|p| = 0.8$$

$$\arg(p) = \pi/4$$

Απόκριση συχνότητας

- Τρισδιάστατη αναπαράσταση και εκτίμηση

