

ΑΝΑΛΥΣΗ ΣΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ ΜΕ ΤΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ FOURIER

Ανάλυση σημάτων και συστημάτων

- ❖ Ο μετασχηματισμός Fourier (DTFT και DFT) είναι **σημαντικότερος** για την ανάλυση σημάτων και συστημάτων
 - Εντοπίζει τις **συχνότητες** των αρμονικών ταλαντώσεων που ενυπάρχουν σε ένα σήμα
 - Με τη σύγκριση των FT των σημάτων εισόδου και εξόδου ενός συστήματος αναλύεται η **συμπεριφορά** του
 - Σε αυτόν βασίζεται ο **σχεδιασμός** συστημάτων (φίλτρα) με επιθυμητή συμπεριφορά

Απόκριση συχνότητας

❖ Σε ένα **LSI σύστημα** με κρουστικής απόκριση $h(n)$

➤ η **έξοδός του** για οποιοδήποτε είσοδο $x(n)$ θα είναι

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

➤ Σύμφωνα με το **θεώρημα της συνέλιξης** ισχύει ότι

$$h(n) * x(n) \xLeftrightarrow{DTFT} H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega})$$

ή

$$DTFT\{h(n) * x(n)\} = DTFT\{h(n)\} \cdot DTFT\{x(n)\}$$

➤ Η $H(e^{j\omega}) = DTFT\{h(n)\}$ ονομάζεται **απόκριση συχνότητας** του συστήματος

➤ Η απόκριση συχνότητας **καθορίζει την επίδραση** του συστήματος στο συχνοτικό περιεχόμενο του σήματος εισόδου

Απόκριση συχνότητας

- ❖ Η $H(e^{j\omega})$ παίρνει **μιγαδικές τιμές** και συνεπώς περιγράφεται από το αντίστοιχο **πλάτος** $|H(e^{j\omega})|$ και **φάση** $\varphi(\omega)$:

$$H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

- ❖ Η μελέτη της απόκρισης συχνότητας αφορά στον **υπολογισμό και τη γραφική παράσταση** του πλάτους και της φάσης της
- ❖ Συχνά μελετάται και η **καθυστερήση ομάδας** (group delay) $\tau(\omega)$ που ορίζεται ως:

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

- ❖ Όταν η φάση $\varphi(\omega)$ είναι μια γραμμική συνάρτηση του ω , το σύστημα λέγεται **σύστημα γραμμικής φάσης**

Απόκριση συχνότητας

❖ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω το σύστημα

$$y[n] = 0.5 \cdot x[n-1] + x[n] + 0.5 \cdot x[n+1]$$

❖ Να υπολογισθούν το πλάτος και η φάση της απόκρισης συχνότητας και να γίνουν οι γραφικές τους παραστάσεις

➤ Για την κρουστική απόκριση και την απόκριση συχνότητας έχουμε:

$$h[n] = 0.5 \cdot \delta[n-1] + \delta[n] + 0.5 \cdot \delta[n+1] \xrightarrow{(*) \text{ πίνακας}}$$

$$H(e^{j\omega}) = 0.5 \cdot e^{-j\omega} + 1 + 0.5 \cdot e^{j\omega} =$$

$$= 1 + 0.5 \cdot (e^{-j\omega} + e^{j\omega}) =$$

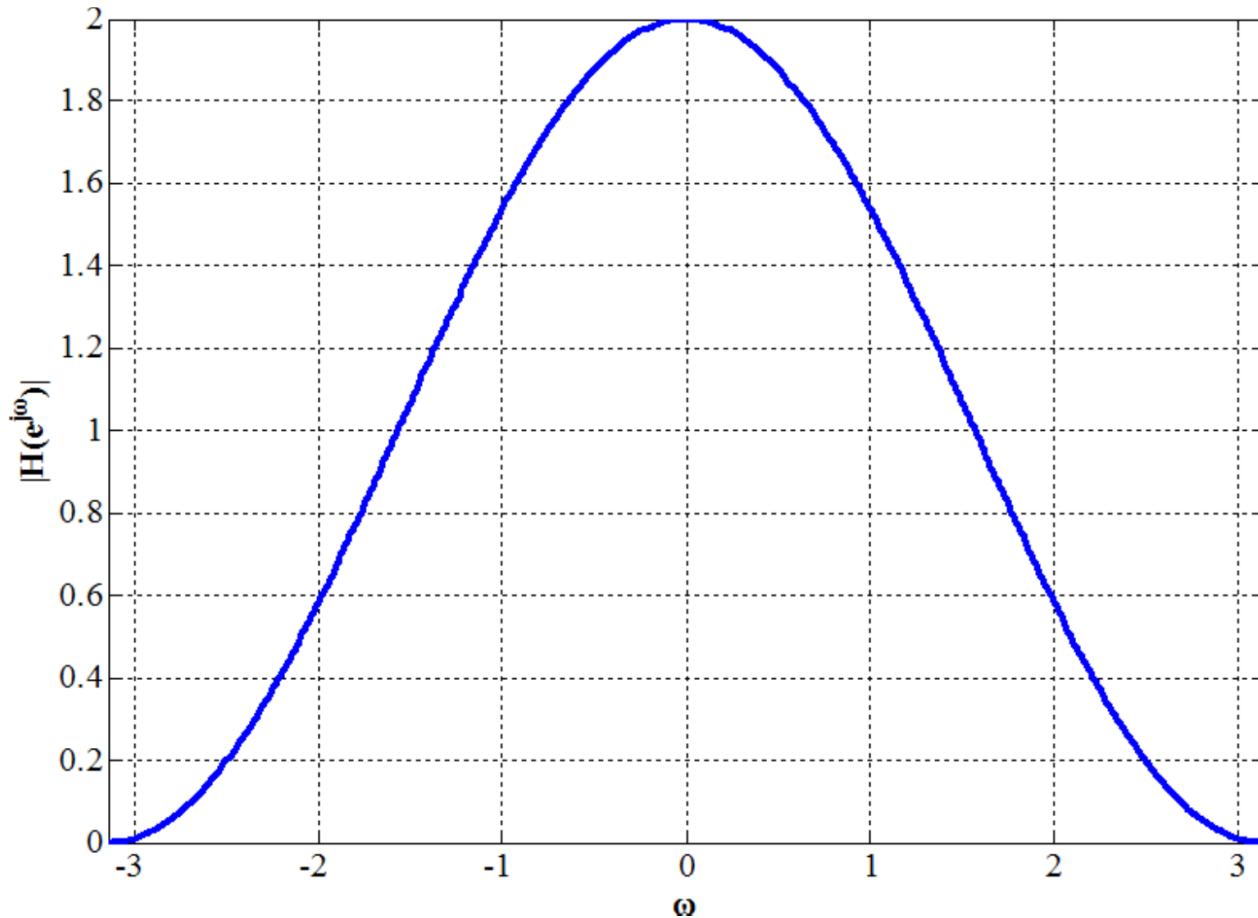
$$= 1 + 0.5 \cdot (\cos\omega - j\sin\omega + \cos\omega + j\sin\omega) = 1 + \cos\omega \Rightarrow$$

$$|H(e^{j\omega})| = 1 + \cos\omega, \quad \varphi(\omega) = 0$$

➤ Η απόκριση συχνότητας είναι πραγματική συνάρτηση του ω

Απόκριση συχνότητας

❖ Το σύστημα αποτελεί ένα χαμηλοπερατό (κατωδιαβατό) φίλτρο



Απόκριση συχνότητας

❖ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω το σύστημα

$$y(n) = 0.5 \cdot x(n-1) + 0.5 \cdot x(n-2)$$

❖ Να υπολογισθούν το πλάτος και η φάση της απόκρισης συχνότητας και να γίνουν οι γραφικές τους παραστάσεις

➤ Για την κρουστική απόκριση και την απόκριση συχνότητας έχουμε:

$$h[n] = 0.5 \cdot \delta[n-1] + 0.5 \cdot \delta[n-2] \xrightarrow{(*) \text{ πίνακας}}$$

$$H(e^{j\omega}) = 0.5 \cdot e^{-j\omega} + 0.5 \cdot e^{-j2\omega} =$$

$$= 0.5 \cdot (e^{-j\omega} + e^{-j2\omega}) = 0.5 \cdot e^{-j\frac{3}{2}\omega} \cdot (e^{j\frac{1}{2}\omega} + e^{-j\frac{1}{2}\omega}) =$$

$$= e^{-j\frac{3}{2}\omega} \cdot \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) \xrightarrow{H(\omega)=|H(\omega)| \cdot e^{j\Phi(\omega)}}$$

$$|H(e^{j\omega})| = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right), \quad \varphi(\omega) = -\frac{3}{2}\omega, \quad \tau(\omega) = -\frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{3}{2}$$

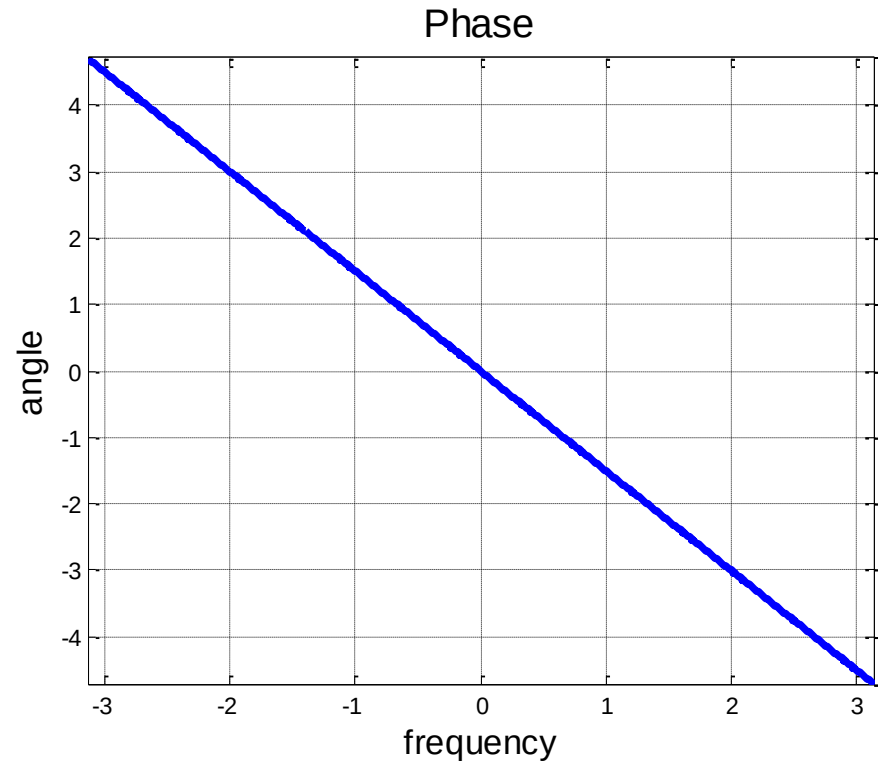
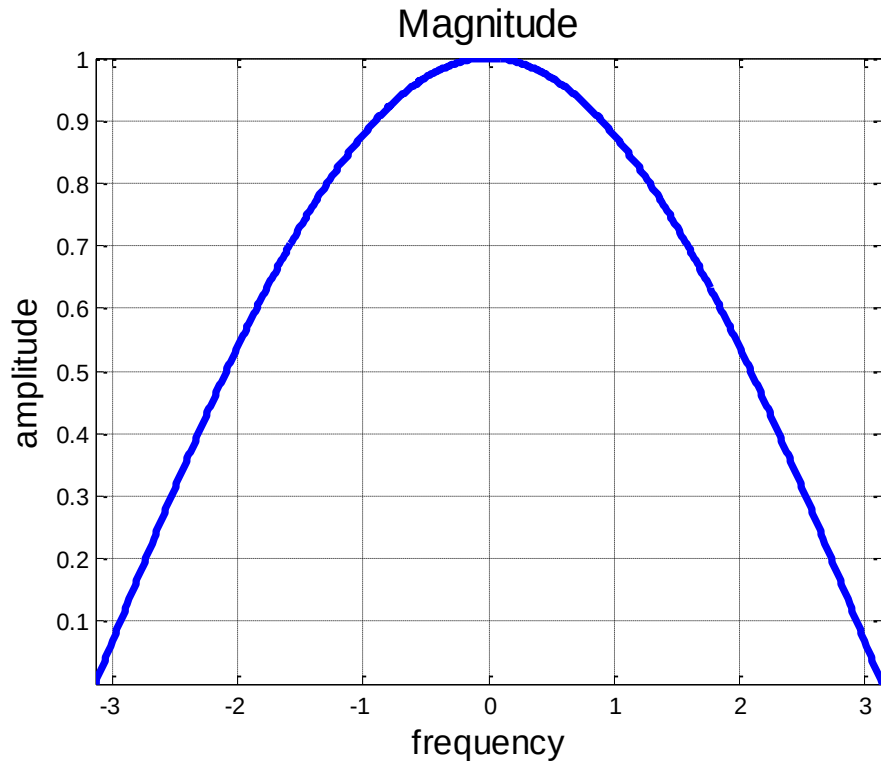
➤ Η απόκριση συχνότητας είναι πραγματική συνάρτηση του ω

Απόκριση συχνότητας

❖ Το σύστημα είναι **γραμμικής φάσης**

➤ Η παράγωγος της φάσης είναι σταθερός αριθμός

- Συνεπώς η καθυστέρηση ομάδας (που δείχνει την καθυστέρηση – σε πλήθος δειγμάτων – που υφίσταται το σήμα εισόδου από το σύστημα) είναι η ίδια για κάθε τιμή του ω .



Απόκριση συχνότητας

❖ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Θεωρούμε το LSI σύστημα με κρ. απόκριση:

$$h(n) = a^n u(n), \quad a \in R, |a| < 1$$

❖ Η απόκριση συχνότητας είναι

(*) πίνακας

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}$$

❖ Το τετράγωνο του πλάτους της απόκρισης συχνότητας είναι:

$$\begin{aligned} |H(e^{j\omega})| &= H(e^{j\omega}) \cdot H^*(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}} \cdot \frac{1}{1 - a \cdot e^{j\omega}} \\ &= \frac{1}{1 + a^2 - 2 \cdot a \cdot \cos(\omega)} \end{aligned}$$

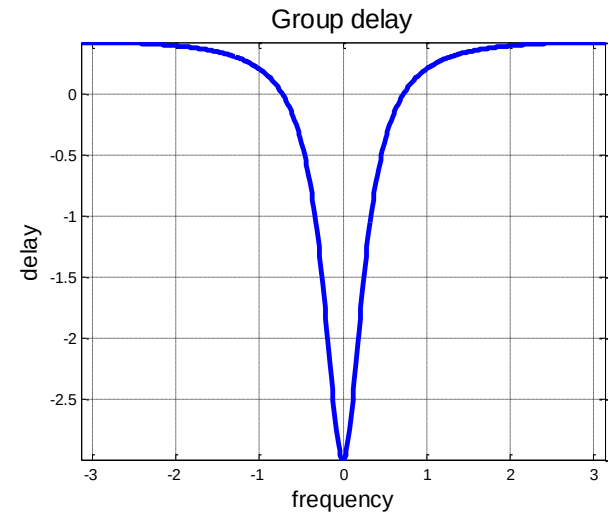
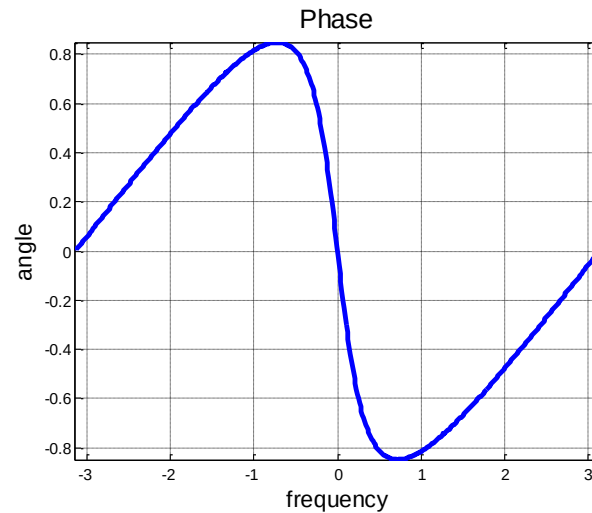
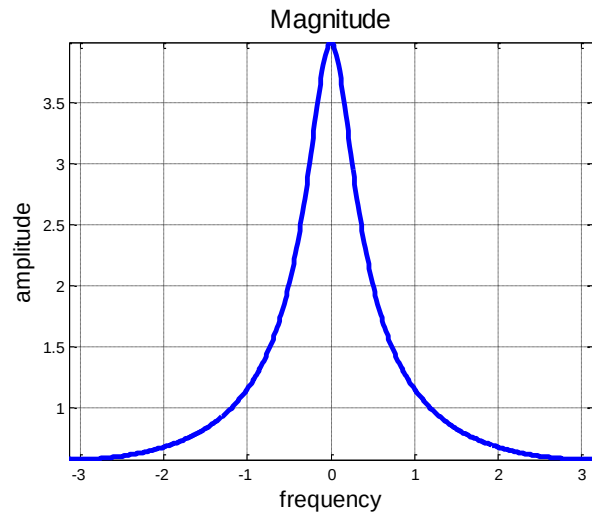
❖ και η φάση είναι:

$$\varphi(\omega) = \tan^{-1} \frac{H_I(e^{j\omega})}{H_R(e^{j\omega})} = \tan^{-1} \frac{-a \cdot \sin \omega}{1 + a^2}$$

Απόκριση συχνότητας

❖ Η καθυστέρηση ομάδας είναι (με παραγωγή της φάσης):

$$\tau(\omega) = \frac{a^2 - a \cdot \cos \omega}{1 + a^2 - 2 \cdot a \cdot \cos \omega}$$



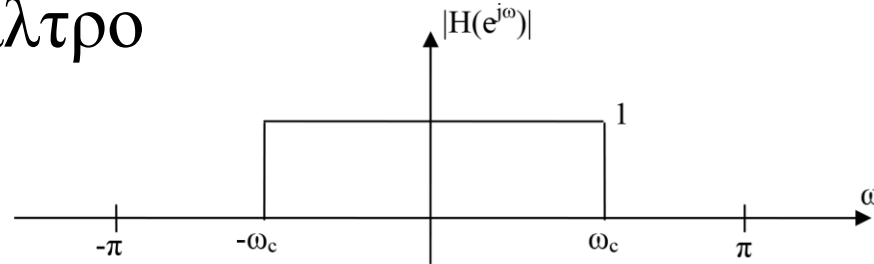
Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

❖ Ανάλογα με τη μεταβολή του πλάτους της απόκρισης συχνότητας σε σχέση με τη συχνότητα, τα συστήματα διακρίνονται στις ακόλουθες κατηγορίες:

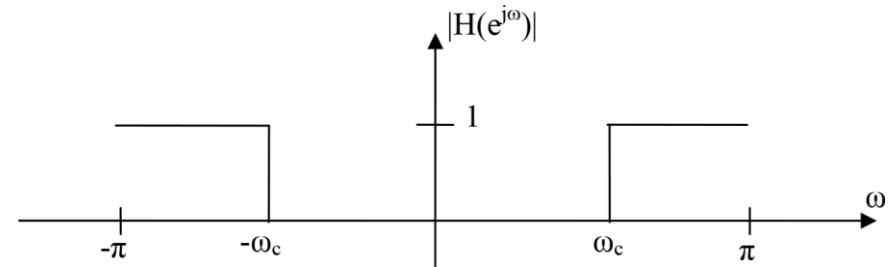
- Χαμηλοπερατά (Low pass): Το πλάτος έχει μεγάλες τιμές για χαμηλές τιμές της συχνότητας και μικρές τιμές για υψηλές τιμές της συχνότητας.
- Υψηπερατά (High pass): Το πλάτος έχει μεγάλες τιμές για υψηλές τιμές της συχνότητας και μικρές τιμές για χαμηλές τιμές της συχνότητας.
- Ζωνοπερατά (Band pass): Το πλάτος έχει μεγάλες τιμές σε μία ζώνη τιμών της συχνότητας και μικρές τιμές εκτός της ζώνης αυτής.
- Ζωνοφρακτικά (Band stop): Το πλάτος έχει μικρές τιμές σε μία ζώνη τιμών της συχνότητας και μεγάλες τιμές εκτός της ζώνης αυτής.

Φίλτρα επιλογής συχνοτήτων

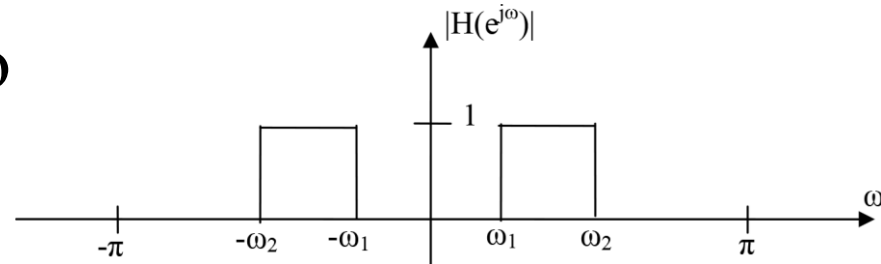
❖ Ιδανικό χαμηλοπερατό φίλτρο



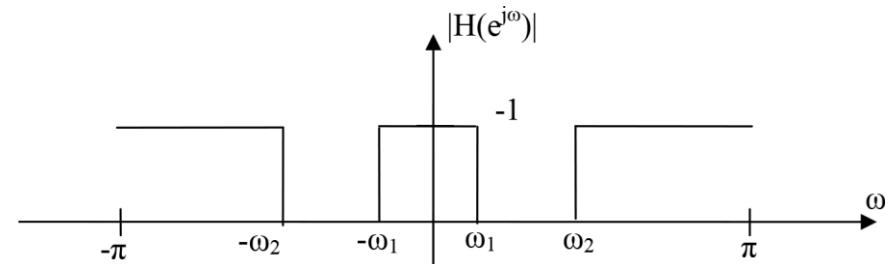
❖ Ιδανικό υψηπερατό φίλτρο



❖ Ιδανικό ζωνοπερατό φίλτρο



❖ Ιδανικό ζωνοφρακτικό φίλτρο



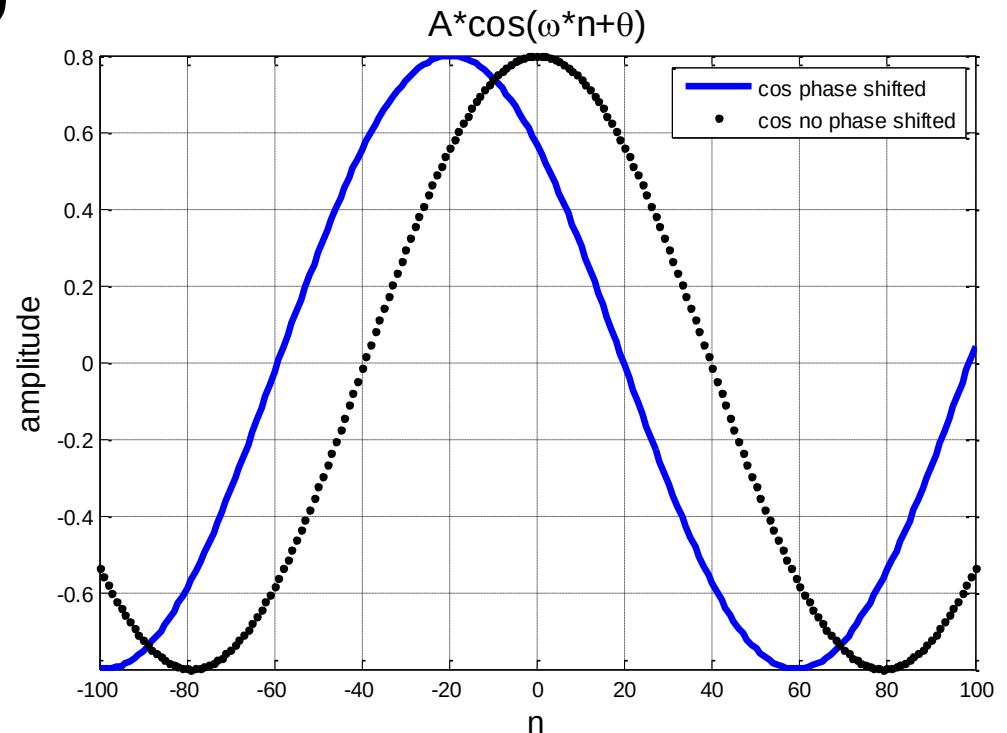
Η Δειγματοληψία

❖ Η γενική μορφή ενός ημιτονοειδούς σήματος είναι

$$x(n) = A \cdot \cos(\omega \cdot n + \theta)$$

όπου A το πλάτος, θ η φάση και ω η κυκλική συχνότητά του

➤ η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ακέραιος που απαριθμεί τις διαδοχικές τιμές των δειγμάτων ➔ η κυκλική συχνότητα μετριέται σε ακτίνια ανά δείγμα (radians per sample)



Η Δειγματοληψία

❖ Η κυκλική συχνότητα **στα ημιτονοειδή σήματα συνεχούς μεταβλητής** μετράται σε ακτίνια ανά δευτερόλεπτο

- (αρμονικές ταλαντώσεις όπου η συνεχής μεταβλητή είναι ο χρόνος)
- Αντίστοιχα η ποσότητα f που ικανοποιεί τη σχέση $\omega = 2\pi f$

$$f = \omega / 2\pi$$

- αποτελεί τη **συχνότητα** του διακριτού ημιτονοειδούς σήματος και μετράται σε κύκλους ανά δείγμα (circles per sample)

❖ Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει:

$$\left. \begin{array}{l} x(n) = A \cdot \cos(\omega \cdot n + \theta) \\ f = \frac{\omega}{2\pi} \end{array} \right\} \Rightarrow x(n) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot n + \theta)$$

Η Δειγματοληψία

- ❖ Τα ημιτονοειδή σήματα $x_a(t) = A \cdot \cos(\Omega \cdot t + \theta)$ **συνεχούς χρόνου** με κυκλική συχνότητα Ω (rad/sec) **είναι περιοδικά**
 - με περίοδο $T = 2\pi/\Omega$ (sec)
 - με συχνότητα $F = 1/T$ (sec⁻¹ ή Hz)
- ❖ Το **ερώτημα** είναι αν και πότε τα διακριτά ημιτονοειδή σήματα είναι περιοδικά

Η Δειγματοληψία

❖ Αν N η **πρωτεύουσα περίοδος**, πρέπει να ισχύει:

✓ $x(n) = x(n+N)$, με:

✓ $x(n) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot n + \theta + 2k\pi)$, k ακέραιος

✓ $x(n+N) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot (n+N) + \theta) = A \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot n + \theta + 2\pi \cdot f \cdot N)$

❖ Άρα η **περιοδικότητα εξασφαλίζεται** αν

✓ $2\pi \cdot f \cdot N = 2k \cdot \pi \Leftrightarrow f = k/N$

• δηλαδή f να είναι ρητός αριθμός

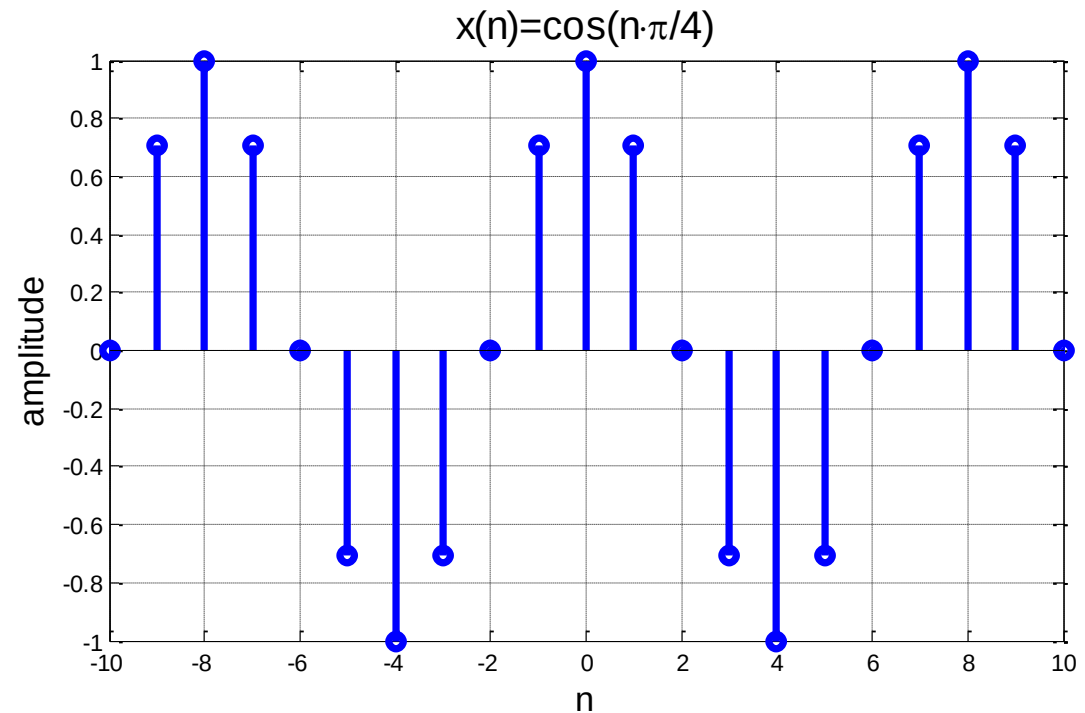
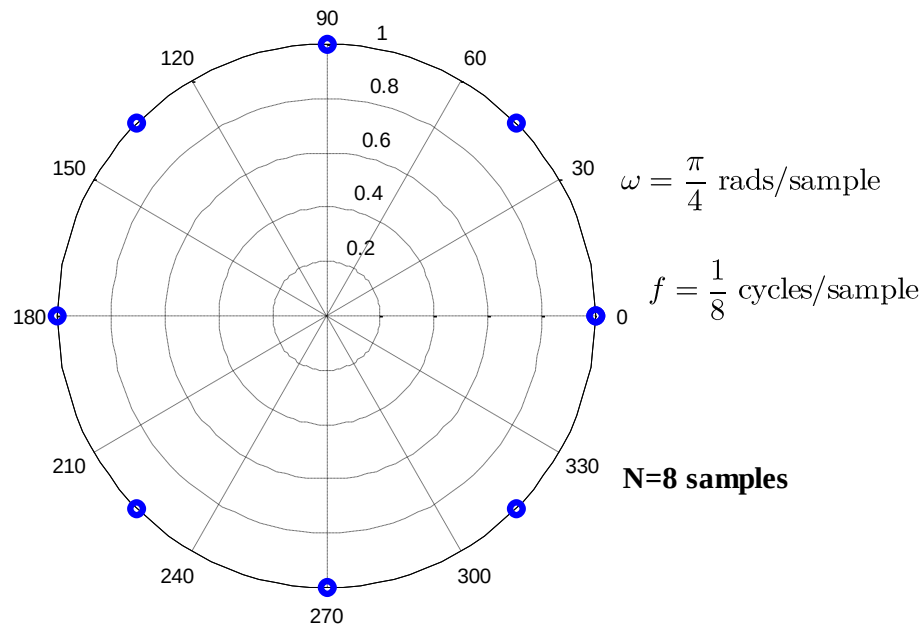
❖ Η πρωτεύουσα περίοδος N είναι θετικός ακέραιος πρώτος προς τον k , (δεν έχουν κοινούς διαιρέτες)

Η Δειγματοληψία

❖ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: αν $A=1$, $\theta=0$ ακτίνια, $f=1/8$ κύκλοι ανά δείγμα

➤ η κυκλική συχνότητα είναι $\omega=2\pi f=\pi/4$ ακτίνια ανά δείγμα

➤ η περίοδος $N=8$



Η Δειγματοληψία

❖ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: αν $A=1$, $\theta=0$ ακτίνια, $f=9/8$ κύκλοι ανά δείγμα

➤ η κυκλική συχνότητα είναι $\omega=2\pi f=9\pi/4$ ακτίνια ανά δείγμα

➤ η περίοδος $N=8$

$$\begin{aligned}x(n) &= \cos\left(\frac{9\pi}{4} \cdot n\right) = \cos\left(\frac{8\pi + \pi}{4} \cdot n\right) = \cos\left(\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) \cdot n\right) \\&= \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot n\right)\end{aligned}$$

❖ Για διαφορετικές τιμές συχνότητες $\rightarrow$ ίσα σήματα

Η Δειγματοληψία

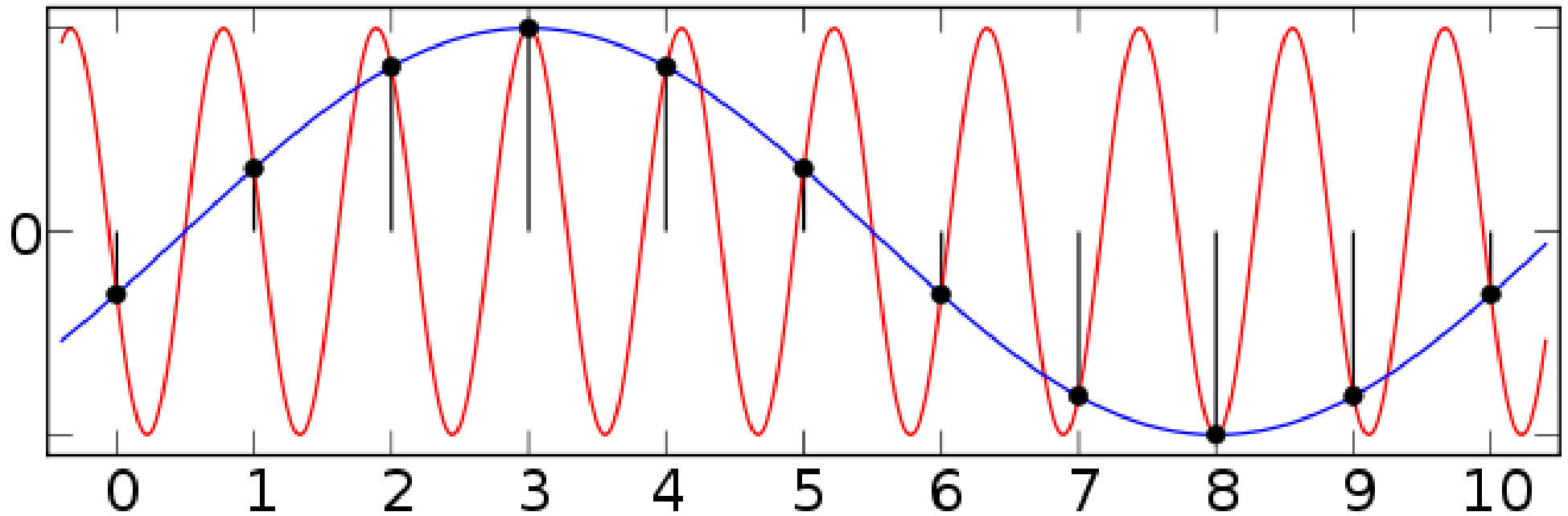
- ❖ Αν $x(n) = \cos(\omega_0 \cdot n)$ με κυκλική συχνότητα ω_0 ($-\pi < \omega_0 \leq \pi$) κάθε διακριτό σήμα $x'(n) = \cos(\omega \cdot n)$ με κυκλική συχνότητα $\omega = \omega_0 + 2k\pi$ (k ακέραιος), είναι ίσο με το $x(n)$
- ❖ Για τις συχνότητες f_0 και f , αντίστοιχα, θα ισχύουν οι σχέσεις
$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}, \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega_0 + 2k\pi}{2\pi} = f_0 + k, \quad -\frac{1}{2} \leq f_0 \leq \frac{1}{2}$$
- ❖ Συνεπώς όλα τα διακριτά ημιτονοειδή σήματα **μπορούν να περιγραφούν** με τιμές της συχνότητας f_0 στο διάστημα $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ (αντίστοιχα της κυκλικής συχνότητας ω_0 στο διάστημα $[-\pi, \pi]$)
- ❖ Κάθε ημιτονοειδής ακολουθία $x'(n)$ με συχνότητα f εκτός του διαστήματος αυτού ($|f| > \frac{1}{2}$, $|\omega| > \pi$) είναι ίδια με κάποια ακολουθία $x(n)$ που έχει συχνότητα εντός του $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

“Ψευδωνυμίες” (Aliasing)

- ❖ Τα διαστήματα $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $[-\pi, \pi]$ λέγονται **θεμελιώδη διαστήματα** της συχνότητας και της κυκλικής συχνότητας των διακριτών ημιτονοειδών σημάτων αντίστοιχα
- ❖ Κάθε ημιτονοειδής ακολουθία $x'(n)$ με **συχνότητα f εκτός του θεμελιώδους διαστήματος** ($|f| > \frac{1}{2}$, $|\omega| > \pi$) είναι ίδια με κάποια ακολουθία $x(n)$ που έχει συχνότητα **εντός του $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$**
 - Η ακολουθία $x'(n)$ θα ονομάζεται **ψευδώνυμη (alias)** της $x(n)$ και το φαινόμενο αυτό **ψευδωνυμία (aliasing)**
 - Η συχνότητα f της ψευδώνυμης διαφέρει από την συχνότητα f_0 κατά ακέραιο αριθμό ($f = f_0 + k$, k ακέραιος)
 - Η συχνότητα ω της ψευδώνυμης διαφέρει από την συχνότητα ω_0 κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π ($\omega = \omega_0 + 2k\pi$, k ακέραιος)

“Ψευδωνυμίες” (Aliasing)

❖ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Δύο διαφορετικές ημιτονοειδείς ακολουθίες που προκύπτουν από τα ίδια δείγματα



Η Δειγματοληψία

❖ Ο πιο συνήθης τρόπος μετατροπής ενός αναλογικού σήματος σε διακριτό είναι η **περιοδική ή ομοιόμορφη δειγματοληψία**

- Λαμβάνονται **δείγματα του σήματος** σε διαδοχικές τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής
- Η απόσταση δύο διαδοχικών τιμών είναι σταθερή και ονομάζεται **διάστημα δειγματοληψίας**
- Αν η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ο χρόνος t , το διάστημα δειγματοληψίας T_s μετράται σε δευτερόλεπτα (sec)
- Το πλήθος των δειγμάτων σε ένα δευτερόλεπτο λέγεται ρυθμός ή συχνότητα δειγματοληψίας

$$F_s = \frac{1}{T_s}$$

- και μετράται σε δείγματα ανά δευτερόλεπτο (samples per second)

Η Δειγματοληψία

- ❖ Αν το **συνεχές σήμα** είναι **ημιτονοειδές** με κυκλική συχνότητα Ω rad/sec, περίοδο T sec, συχνότητα F sec⁻¹ (Hz) και δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned}x_a(t) &= A \cdot \cos(\Omega \cdot t + \theta) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \theta\right) \\&= A \cdot \cos(2\pi \cdot F \cdot t + \theta)\end{aligned}$$

- ❖ από την **περιοδική δειγματοληψία** του προκύπτει η ακολουθία $x(n)$ σύμφωνα με τη σχέση

$$\begin{aligned}x(n) &= x_a(T_s \cdot n) = A \cdot \cos(\Omega \cdot T_s \cdot n + \theta) \\&= A \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{F}{F_s} \cdot n + \theta\right)\end{aligned}$$

Η Δειγματοληψία

- ❖ Η συχνότητα του $x(n)$ είναι $f = F/F_s$
- ❖ Η συχνότητα του συνεχούς που ανακτάται είναι $F = f \cdot F_s$
- ❖ Επειδή η f ανήκει στο διάστημα $[-1/2, 1/2]$ πρέπει
$$-\frac{1}{2} \leq \frac{F}{F_s} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left| \frac{F}{F_s} \right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \cdot |F| \leq |F_s|$$
- ❖ Δηλαδή η συχνότητα δειγματοληψίας είναι τουλάχιστον διπλάσια της συχνότητας του συνεχούς σήματος

Η Δειγματοληψία

❖ Αν το συνεχές σήμα ήταν το

$$y_a(t) = A \cdot \cos(2\pi \cdot (F + k \cdot F_s) \cdot t + \theta)$$

❖ με συχνότητα $F' = F + kF_s$

➤ από τη δειγματοληψία του με ρυθμό F_s θα προκύψει το διακριτό σήμα

$$y(n) = y_a(T_s \cdot n) = A \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{F'}{F_s} \cdot n + \theta\right)$$

$$= A \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{F + kF_s}{F_s} \cdot n + \theta\right)$$

$$= A \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{F}{F_s} \cdot n + 2\pi \cdot k \cdot n + \theta\right)$$

$$= A \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{F}{F_s} \cdot n + \theta\right) = x(n)$$

Η Δειγματοληψία

- ❖ Άρα τα συνεχή σήματα $x_a(t)$ και $y_a(t)$ μετά από την παραπάνω δειγματοληψία **παριστάνονται από την ίδια ακολουθία $x(n)$**
- ❖ Το γεγονός αυτό οφείλεται στο ότι η συχνότητα του διακριτού σήματος $y(n)$ είναι **ψευδώνυμη** της συχνότητας του διακριτού σήματος $x(n)$

➤ Πράγματι η συχνότητα f' του σήματος $y(n)$ ισούται με

$$f' = \frac{F + kF_s}{F_s} = \frac{F}{F_s} + k = f + k$$

- ❖ **Για να μην είναι δυνατή η ψευδωνυμία** και να μπορεί να ανακτηθεί με μοναδικό τρόπο το αρχικό συνεχές σήμα πρέπει να ισχύει η σχέση $2 \cdot |F| \leq |F_s|$, η οποία για θετικές τιμές των συχνοτήτων γράφεται

$$F_s \geq 2 \cdot F$$

Η Δειγματοληψία

- ❖ Ένα σήμα συνεχούς μεταβλητής ορισμένο σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ είναι δυνατόν να αναπαρασταθεί με την ανάλυση Fourier ως άθροισμα αρμονικών ταλαντώσεων σύμφωνα με τη σχέση

$$x_a(t) = \sum_{k=0}^K A_k \cdot \cos(2\pi \cdot F_k \cdot t + \theta_k)$$

- ❖ Η ωφέλιμη πληροφορία του σήματος είναι δυνατόν να φέρεται στα πλάτη A_k , τις συχνότητες F_k ή τις φάσεις θ_k .
- ❖ Αν $F_{max} = \max(F_k)$ για να αποφύγουμε το φαινόμενο της ψευδωνμίας κατά την δειγματοληψία του $x_a(t)$, πρέπει ο ρυθμός δειγματοληψίας να είναι τουλάχιστον $2 \cdot F_{max}$
- ❖ Η ποσότητα αυτή ονομάζεται ρυθμός Nyquist συμβολίζεται F_N και ισχύει: $F_N = 2 \cdot F_{max}$

Το θεώρημα της δειγματοληψίας

- ❖ Αν η **μεγαλύτερη απολύτως συχνότητα** που περιέχεται σε ένα αναλογικό σήμα $x_a(t)$ είναι $F_{max}=B$ και το σήμα δειγματοληπτείται με ρυθμό $F_s > 2 \cdot F_{max} = 2 \cdot B$
- τότε το $x_a(t)$ **μπορεί να ανακατασκευασθεί επακριβώς** από τα δείγματά του με χρήση της συνάρτησης παρεμβολής

$$g(t) = \frac{\sin(2\pi \cdot B \cdot t)}{2\pi \cdot B \cdot t}$$

- Σύμφωνα με τη σχέση

$$x_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\frac{n}{F_s}\right) \cdot g\left(t - \frac{n}{F_s}\right)$$

Το θεώρημα της δειγματοληψίας

❖ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω το αναλογικό σήμα

$$x_a(t) = 2 \cdot \cos(50\pi \cdot t) + \sin(200\pi \cdot t) - 5 \cdot \cos(70\pi \cdot t)$$

❖ ποιος ο ρυθμός Nyquist F_N ;

➤ $F_1 = 25 \text{ Hz}$, $F_2 = 100 \text{ Hz}$, $F_3 = 35 \text{ Hz}$

➤ $F_{\max} = 100 \text{ Hz}$ άρα $F_N = 200 \text{ Hz}$

❖ **Παρατήρηση**: Αν το σήμα $\sin(200\pi \cdot t)$ δειγματοληπτηθεί με συχνότητα δειγματοληψίας $F_s = F_N$, το διακριτό σήμα είναι $\sin(\pi \cdot n) = 0$ και ως εκ τούτου δεν μπορεί να ανακτηθεί το αρχικό συνεχές σήμα. Ένας τρόπος να υπερβούμε το πρόβλημα αυτό είναι ο ρυθμός δειγματοληψίας να είναι $F_s > F_N$

❖ Έστω το συνεχές σήμα $x_a(t) = \cos(100\pi \cdot t)$

❖ Ερωτήσεις

- Α) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας ώστε να αποφευχθεί η ψευδωνυμία
- Β) Αν ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι 200 Hz, ποιο το διακριτό σήμα που θα προκύψει;
- Γ) Αν ο ρυθμός δειγματοληψίας είναι 75 Hz, ποιο το διακριτό σήμα που θα προκύψει;
- Δ) Ποια η τιμή της συχνότητας ενός συνεχούς σήματος συνημιτόνου που μετά από σωστή δειγματοληψία δίνει διακριτό σήμα ίδιο με αυτό που προκύπτει στο ερώτημα Γ;

❖ Απαντήσεις

➤ Α) $F=100\pi/2\pi = 50$ Hz, άρα η ελάχιστη τιμή της συχνότητας δειγματοληψίας είναι $F_s=100$ Hz (δείγματα / δευτερόλεπτο)

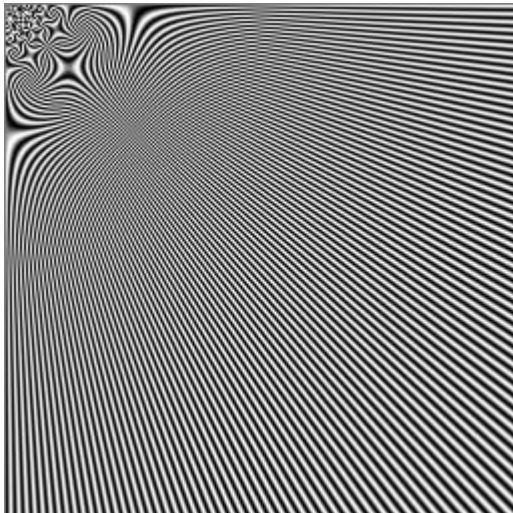
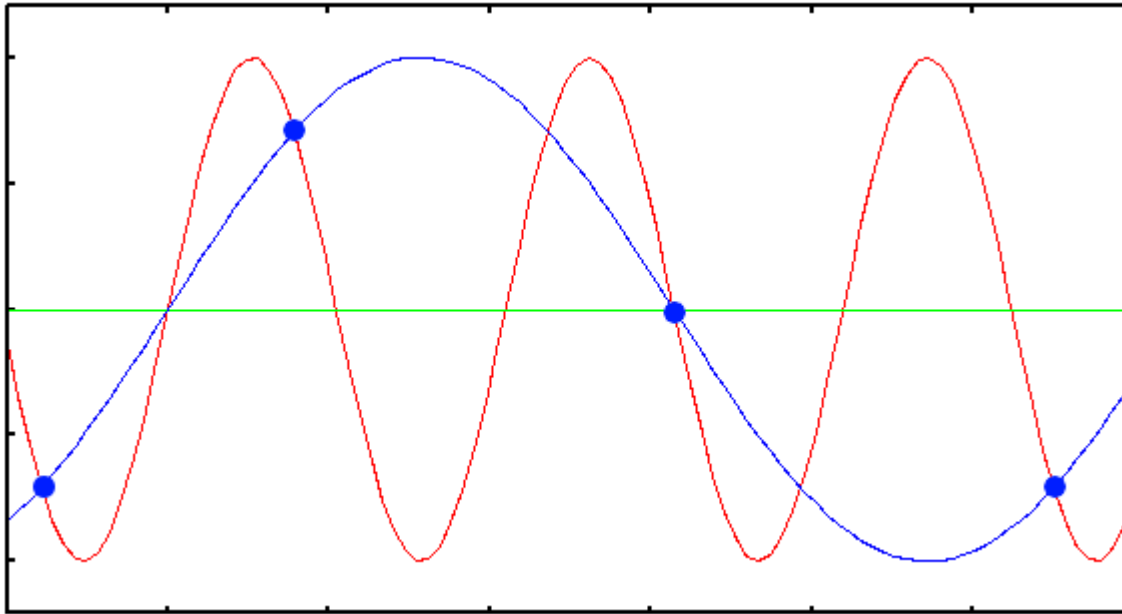
➤ Β) $x(n) = \cos\left(2\pi \frac{F}{F_s} n\right) = \cos\left(2\pi \frac{50}{200} n\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} n\right)$

➤ Γ) $x(n) = \cos\left(2\pi \frac{F}{F_s} n\right) = \cos\left(2\pi \frac{50}{75} n\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3} n\right)$

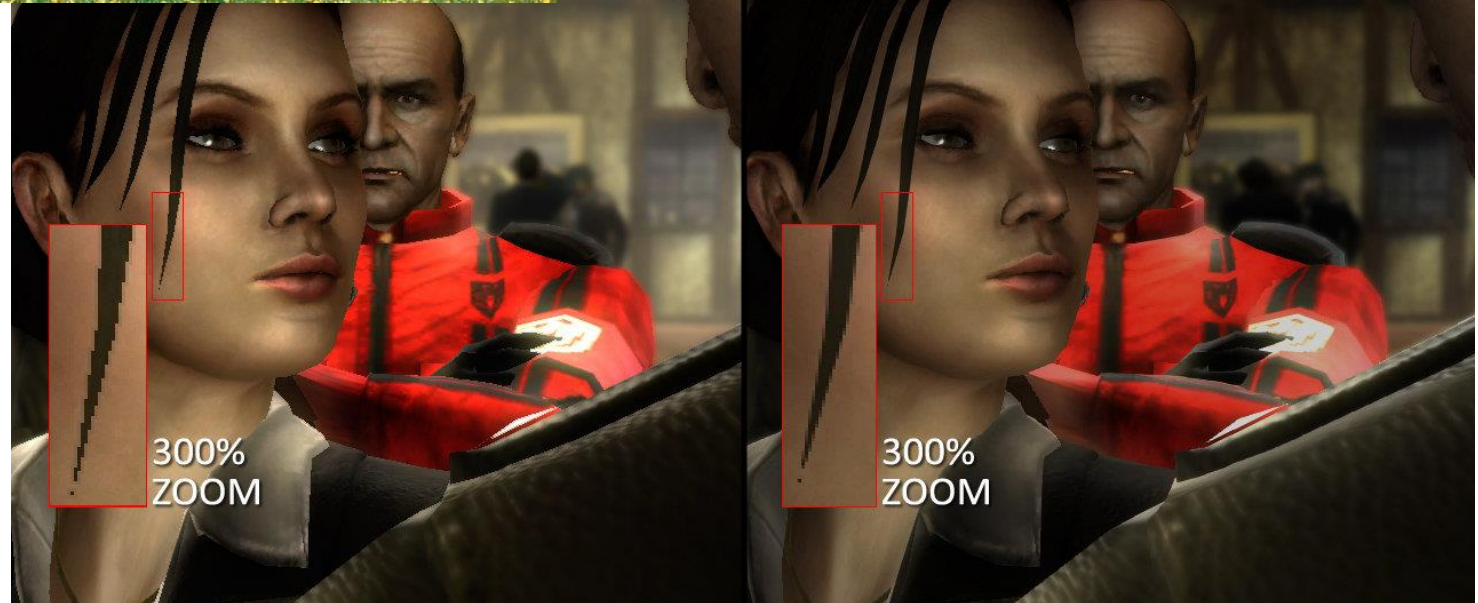
➤ Δ) Η συχνότητα του διακριτού σήματος $x(n)$ του ερωτήματος Γ είναι $f=2/3=-1/3+1$ και ως εκ τούτου είναι ψευδώνυμη της $f_0 = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

➤ Άρα η συχνότητα F του ζητούμενου αναλογικού σήματος ικανοποιεί τη σχέση $F/75=1/3$ άρα $F=25$ Hz

Παραδείγματα aliasing



Παραδείγματα aliasing



Συχνά χρησιμοποιούμενα ζεύγη DTFT

Ακολουθία	DTFT
$\delta(n)$	1
$\delta(n - n_0)$	$e^{-j \cdot n_0 \omega}$
1	$2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega)$
$e^{j \cdot n \cdot \omega_0}$	$2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$
$a^n \cdot u(n), \quad a < 1$	$\frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}$
$-a^n \cdot u(-n - 1), \quad a > 1$	$\frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}$
$(n + 1) \cdot a^n \cdot u(n), \quad a < 1$	$\frac{1}{(1 - a \cdot e^{-j\omega})^2}$
$\cos n\omega_0$	$\pi \cdot \delta(\omega + \omega_0) + \pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$

[επιστροφή....](#)