

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER
ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER
ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

DTFT και Περιοδική/Κυκλική Συνέλιξη

Διακριτός μετασχηματισμός συνημιτόνου

DCT – discrete cosine transform

Η σχέση $g_0(n) = \frac{1}{\sqrt{N}}$, $g_k(n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \cos\left(\frac{\pi}{2N} k(2n+1)\right)$ για $k=1..N-1$ και $n=0,..,N-1$

αποτελεί «πυρήνα» (kernel) δημιουργίας ορθοκανονικών διανυσμάτων για κάθε τιμή του N .

Στην περίπτωση αυτή οι συντελεστές c_k (δηλαδή οι προβολές του x στα g_k) δίνονται (*):

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} x[n], \quad c_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \cos\left(\frac{\pi}{2N} k \cdot (2n+1)\right) \cdot x[n] \quad \text{για } k=1..N-1$$

Η σχέση αυτή εκφράζει το **μονοδιάστατο Διακριτό Μετασχηματισμό Συνημιτόνου (DCT)**

Οι τιμές $x[n]$ προκύπτουν έτσι:

$$x[n] = \frac{c_0}{\sqrt{N}} + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^{N-1} c_k \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2N} k(2n+1)\right)$$

Η σχέση αυτή εκφράζει τον **αντίστροφο μονοδιάστατο Διακριτό Μετασχηματισμό Συνημιτόνου (inverse DCT – iDCT)**

(*) με αντικατάσταση των g_k στις σχέσεις $c_i = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] g_i[n]$

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT)

❖ Οι συντελεστές ενός πεπερασμένου μήκους N σήματος x είναι

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot x[n]$$

➤ Η σχέση αποτελεί το **μοναδιαίο (unitary) Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier** (Discrete Time Fourier Transform - DFT) N -σημείων

❖ Ανάπτυγμα σε σειρά ενός πεπερασμένου μήκους N σήματος x

$$x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

➤ Η σχέση αποτελεί το **ανάπτυγμα στην αντίστοιχη σειρά**

❖ Αν θέσουμε $C_k = c_k \sqrt{N}$

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier - DFT

$$C_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot x[n], \text{ ή αλλιώς: } X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot x[n]$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} C_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \text{ ή αλλιώς: } x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Διακριτή Σειρά Fourier - DFS

Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου (DTFT)

- ❖ Η ποσότητα $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$, $k = 0 \dots N - 1$, ονομάζεται **κυκλική συχνότητα** και παίρνει N διακριτές τιμές: $0 \dots (2\pi(N-1)/N)$
- ❖ Για σήματα **μη πεπερασμένου μήκους** ($N \rightarrow \infty$) η μεταβλητή ω_k αντικαθίσταται από τη **συνεχή μεταβλητή** $\omega \in [0, 2\pi]$
- ❖ Ο **Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου** (Discrete Time Fourier Transform - **DTFT**) ορίζεται:

$$\tilde{X}(\omega) = X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n} \cdot x[n]$$

- ❖ Ο **Αντίστροφος Μετασχηματισμός Fourier Διακριτού Χρόνου** (**i-DTFT**) αποδεικνύεται ότι είναι:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n} X(e^{j\omega}) d\omega$$

DTFT και DFT

- ❖ Για ένα διακριτό σήμα $x[n]$ πεπερασμένου μήκους N ορίζεται και υπάρχει ο DTFT και ο DFT N -δειγμάτων σύμφωνα με:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\omega n}, \quad \omega \in (-\pi, \pi]$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

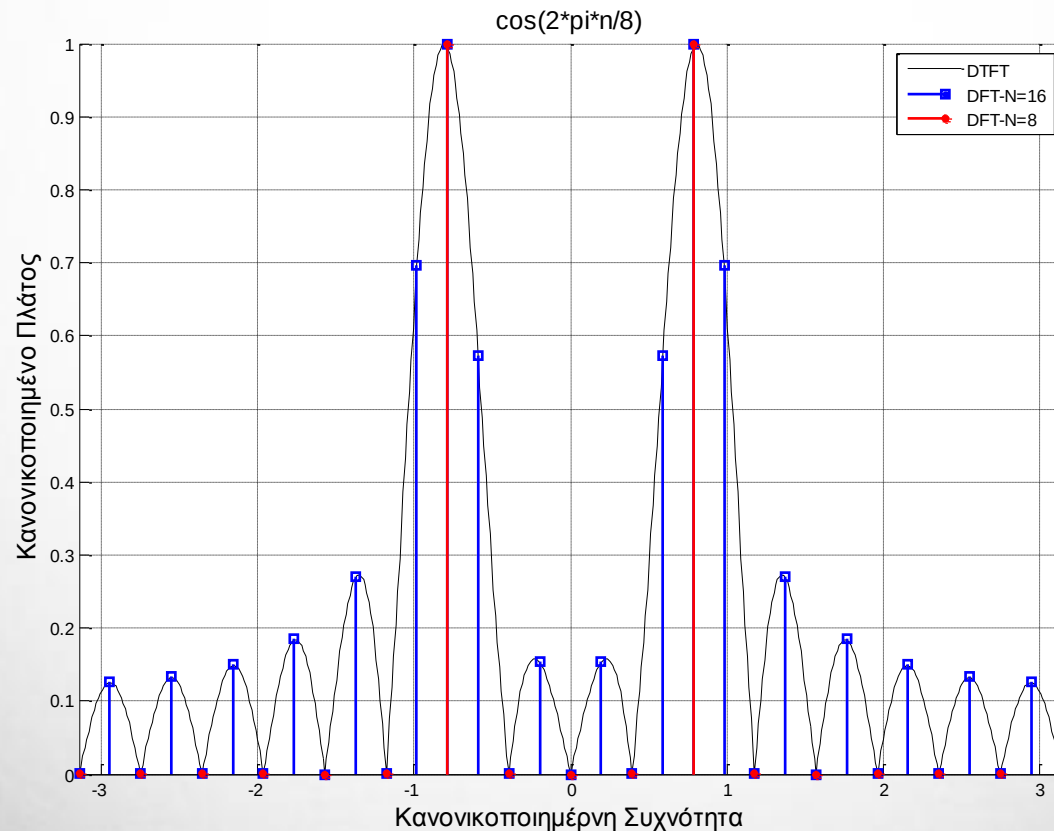
- ❖ Από τις σχέσεις προκύπτει ότι

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k} \quad k = 0 \dots N-1$$

- Δηλαδή ο **DFT N -σημείων** του $x[n]$ προκύπτει από τη **δειγματοληψία της κυκλικής συχνότητας ω του DTFT** του $x[n]$ με δείγματα που απέχουν διαδοχικά μεταξύ τους απόσταση $2\pi/N$

DTFT και DFT

- ❖ Αν αυξήσουμε το μήκος N προσθέτοντας μηδενικές τιμές στο τέλος του $x[n]$
 - ο DTFT δε θα αλλάξει
 - θα αυξηθεί όμως το πλήθος των δειγμάτων του DFT N -σημείων



Ιδιότητες του DTFT

Ιδιότητα	Ακολουθία	DTFT
Γραμμικότητα	$a \cdot x[n] + b \cdot y[n]$	$a \cdot X(e^{j\omega}) + b \cdot Y(e^{j\omega})$
Μετατόπιση στο χρόνο	$x[n - n_0]$	$e^{-jn_0\omega} \cdot X(e^{j\omega})$
Αντιστροφή στο χρόνο	$x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$
Διαμόρφωση	$e^{-jn\omega_0} \cdot x[n]$	$X(e^{j(\omega-\omega_0)})$
Συνέλιξη στο χρόνο	$x[n] * y[n]$	$X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega})$
Μιγαδική συζυγία	$x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
Παραγωγήιση	$n \cdot x[n]$	$j \frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
Πολλαπλασιασμός στο χρόνο	$x[n] \cdot y[n]$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) Y(e^{j(\omega-\theta)}) d\theta$
Συμμετρία	Πραγματική και άρτια Πραγματική και περιττή Φανταστική και άρτια Φανταστική και περιττή	Πραγματική και άρτια Φανταστική και περιττή Φανταστική και άρτια Πραγματική και άρτια

Ζεύγη DTFT

$x[n]$	$X(\omega)$	Σχόλια
$\delta[n]$	1	
$\delta[n - M]$	$e^{-i\omega M}$	ακέραιος M
$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[n - Mm]$	$\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega Mm} = \frac{1}{M} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{\omega}{2\pi} - \frac{k}{M}\right)$	ακέραιος M
$u[n]$	$\frac{1}{1 - e^{-i\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi \delta(\omega - 2\pi k)$	Ο όρος $1/(1 - e^{-i\omega})$ εξηγείται ως μια κατανομή κατά την έννοια της πρωτεύουσας τιμής Cauchy γύρω από τους πόλους στο $\omega = 2\pi k$.
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1 - ae^{-i\omega}}$	$0 < a < 1$
e^{-ian}	$2\pi \delta(\omega + a)$	πραγματικός a
$\cos(an)$	$\pi [\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a)]$	πραγματικός a
$\sin(an)$	$\frac{\pi}{i} [\delta(\omega - a) - \delta(\omega + a)]$	πραγματικός a
$\text{rect}\left[\frac{(n - M/2)}{M}\right]$	$\frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-i\omega M/2}$	ακέραιος M
$\text{sinc}[(a + n)]$	$e^{ia\omega}$	πραγματικός a
$W \cdot \text{sinc}^2(Wn)$	$\text{tri}\left(\frac{\omega}{2\pi W}\right)$	πραγματικός W $0 < W \leq 0.5$
$W \cdot \text{sinc}(Wn)$	$\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\pi W}\right)$	πραγματικός W $0 < W \leq 1$
$\begin{cases} 0 & n = 0 \\ \frac{(-1)^n}{n} & \text{elsewhere} \end{cases}$	$j\omega$	Λειτουργεί σαν φίλτρο διαφόρισης
$\frac{W}{(n+a)} \{\cos[\pi W(n+a)] - \text{sinc}[W(n+a)]\}$	$j\omega \cdot \text{rect}\left(\frac{\omega}{\pi W}\right) e^{ja\omega}$	πραγματικοί W, a $0 < W \leq 1$
$\frac{1}{\pi n^2} [(-1)^n - 1]$	$ \omega $	
$\begin{cases} 0; & n \text{ even} \\ \frac{2}{\pi n}; & n \text{ odd} \end{cases}$	$\begin{cases} j & \omega < 0 \\ 0 & \omega = 0 \\ -j & \omega > 0 \end{cases}$	Μετασχηματισμός Hilbert

Συχνά χρησιμοποιούμενα ζεύγη DTFT

Ακολουθία	DTFT
$\delta(n)$	1
$\delta(n - n_0)$	$e^{-j \cdot n_0 \omega}$
1	$2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega)$
$e^{j \cdot n \cdot \omega_0}$	$2 \cdot \pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$
$a^n \cdot u(n), \quad a < 1$	$\frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}$
$-a^n \cdot u(-n - 1), \quad a > 1$	$\frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\omega}}$
$(n + 1) \cdot a^n \cdot u(n), \quad a < 1$	$\frac{1}{(1 - a \cdot e^{-j\omega})^2}$
$\cos n\omega_0$	$\pi \cdot \delta(\omega + \omega_0) + \pi \cdot \delta(\omega - \omega_0)$

Παράδειγμα DTFT

❖ Να βρεθεί ο DTFT για την ακολουθία $x[n] = -a^n \cdot u[-n - 1]$ για $|a| > 1$

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{-1} a^n \cdot e^{-jn\omega} = - \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} \cdot e^{jn\omega} \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1} \cdot e^{j\omega})^n + 1 = - \frac{1}{1 - a^{-1} \cdot e^{j\omega}} + 1 = \frac{1}{1 - a \cdot e^{j\omega}} \end{aligned}$$

Παράδειγμα DTFT

❖ Να βρεθεί ο DTFT για την ακολουθία $x[n] = \cos(13\pi n/8)$

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-jn\omega} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{13\pi}{8}n\right) \cdot e^{-jn\omega} \\ &= \pi(\delta[\omega + \omega_0] + \delta[\omega - \omega_0]) = \pi\left(\delta\left[\omega + \frac{13\pi}{8}\right] + \delta\left[\omega - \frac{13\pi}{8}\right]\right) \end{aligned}$$

Μετασχηματισμοί Fourier

❖ Συνεχούς χρόνου

- Fourier Transform (FT ή Continuous FT-CFT)
- Fourier Series (αντίστροφος Fourier Transform – iFS ή iCFS)
- Short-Time Fourier Transform (STFT ή STCFT)

❖ Διακριτού χρόνου

- Μετασχηματισμός Fourier διακριτού χρόνου – DTFT
 - για μη-περιοδικές ακολουθίες με περιοδική έξοδο
 - μετασχηματισμός σε πεπερασμένο πεδίο συχνότητας (μήκος 1 περιόδου)
- Διακριτός μετασχηματισμός Fourier – DFT
 - για περιοδικές ακολουθίες
 - διαφορά με DTFT ότι είναι πεπερασμένης εισόδου/εξόδου
 - γρήγορη υλοποίηση μέσω του FFT
- Short-Time Discrete Fourier Transform (STDFT)
 - Αρχή απροσδιοριστίας του Heisenberg
 - ✓ Αύξηση ανάλυσης στο χρόνο → μείωση ανάλυσης στη συχνότητα

Μετασχηματισμοί Fourier

Fourier Transform

Σήματα συνεχή και αperiοδικά

Fourier Series

Σήματα συνεχή και περιοδικά

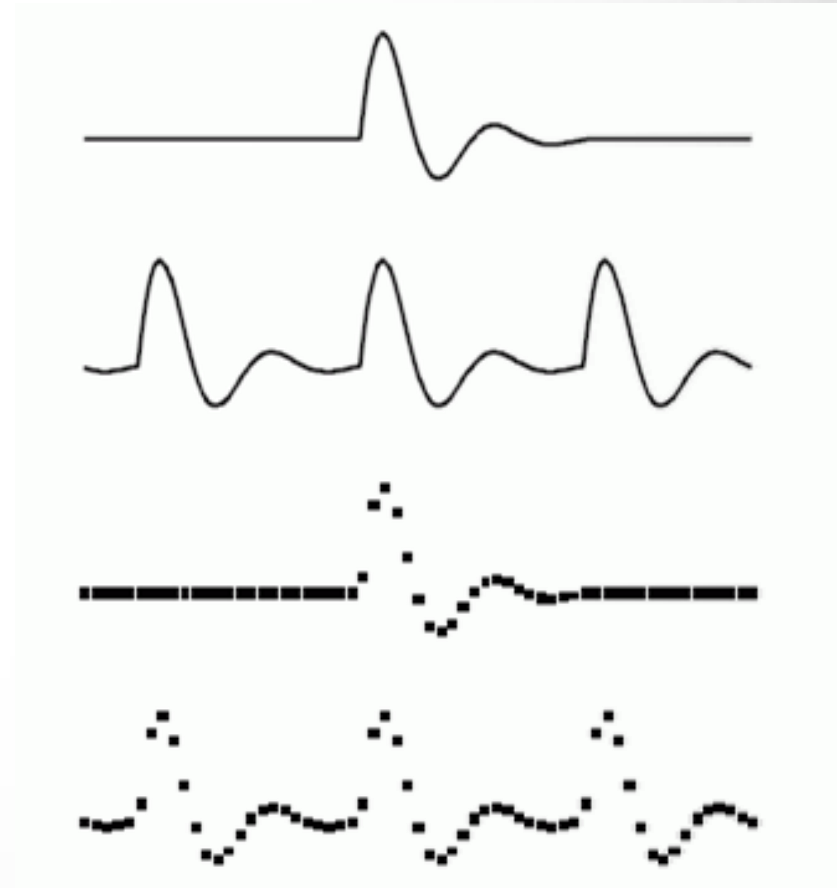
Discrete Time Fourier Transform

Σήματα διακριτού χρόνου και αperiοδικά

Discrete Fourier Transform

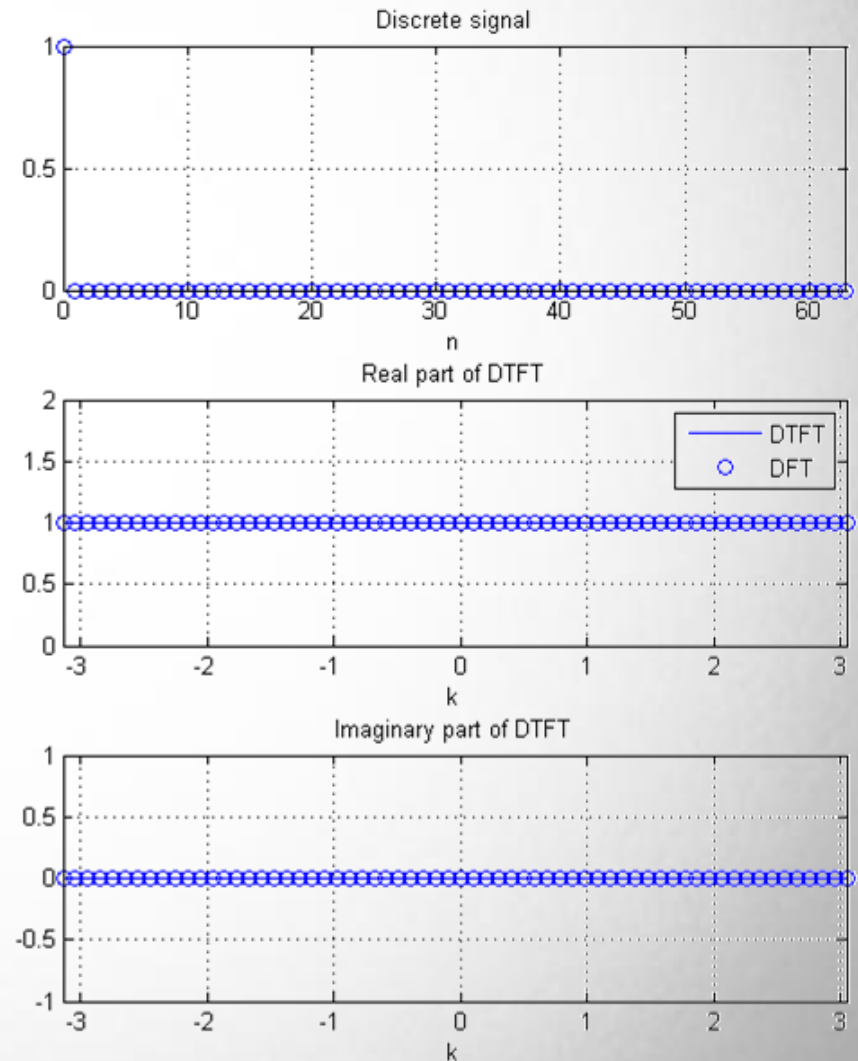
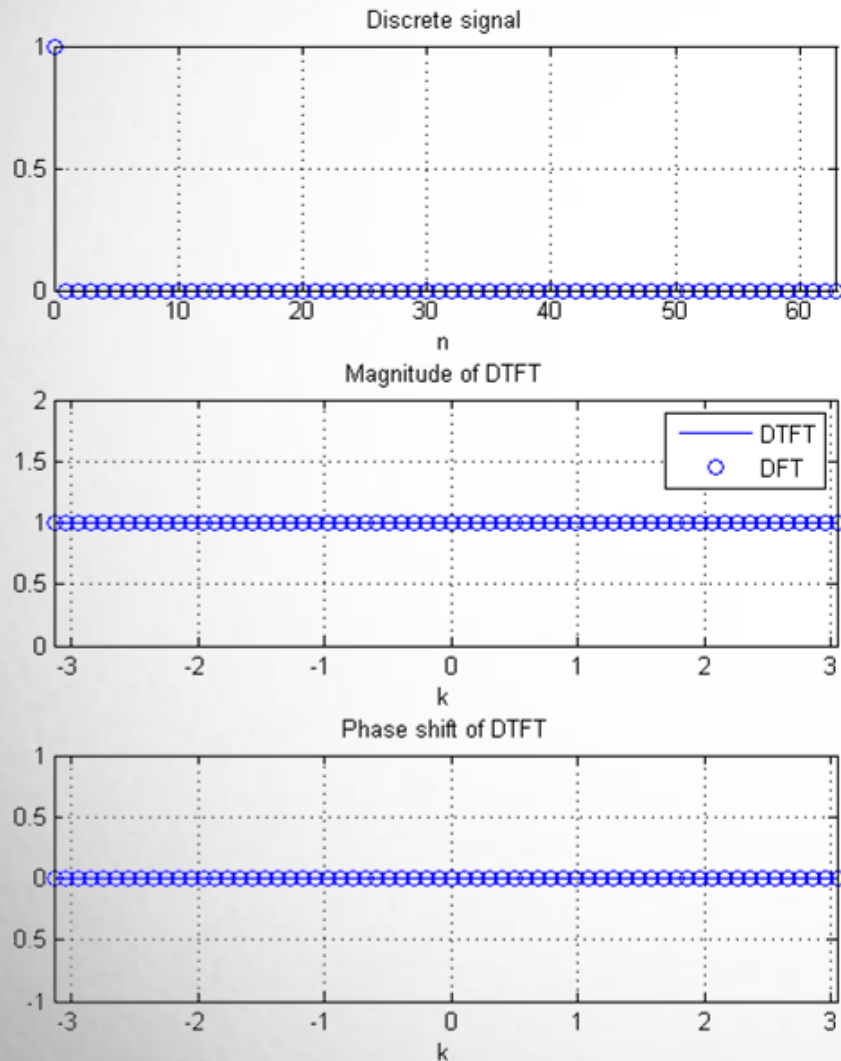
Σήματα διακριτού χρόνου και περιοδικά

Διακριτός χρόνος και πεπερασμένο μήκος



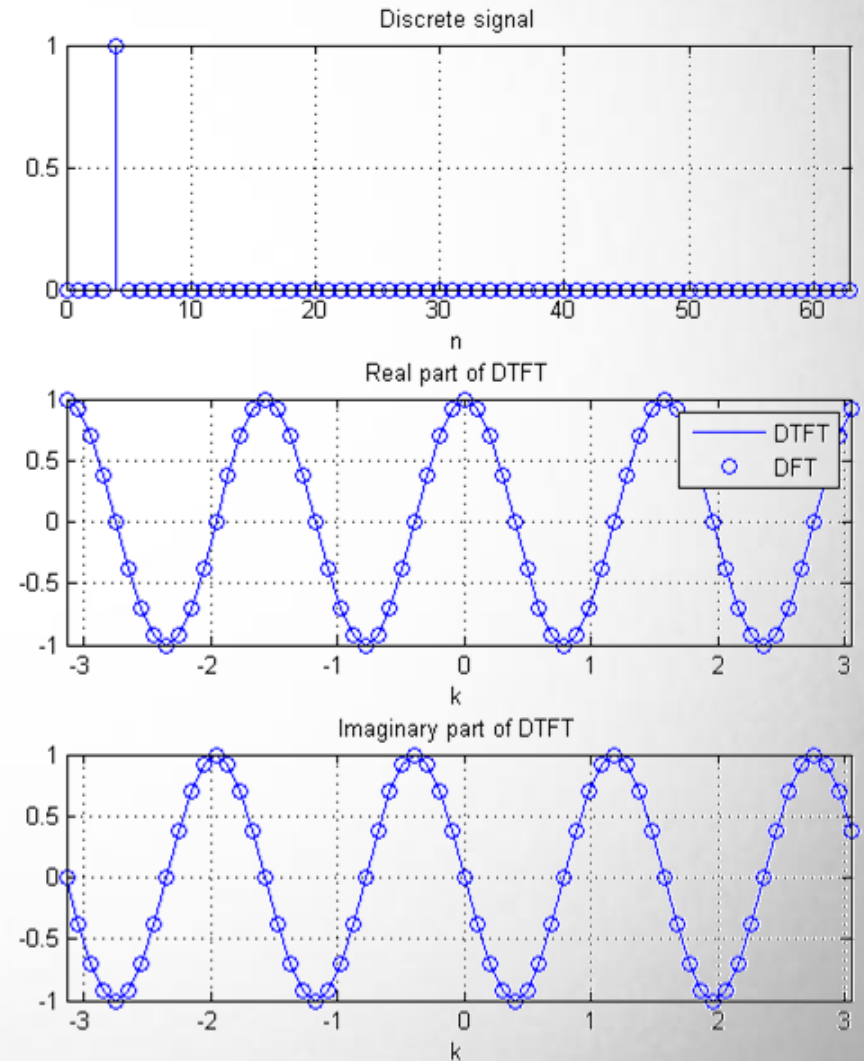
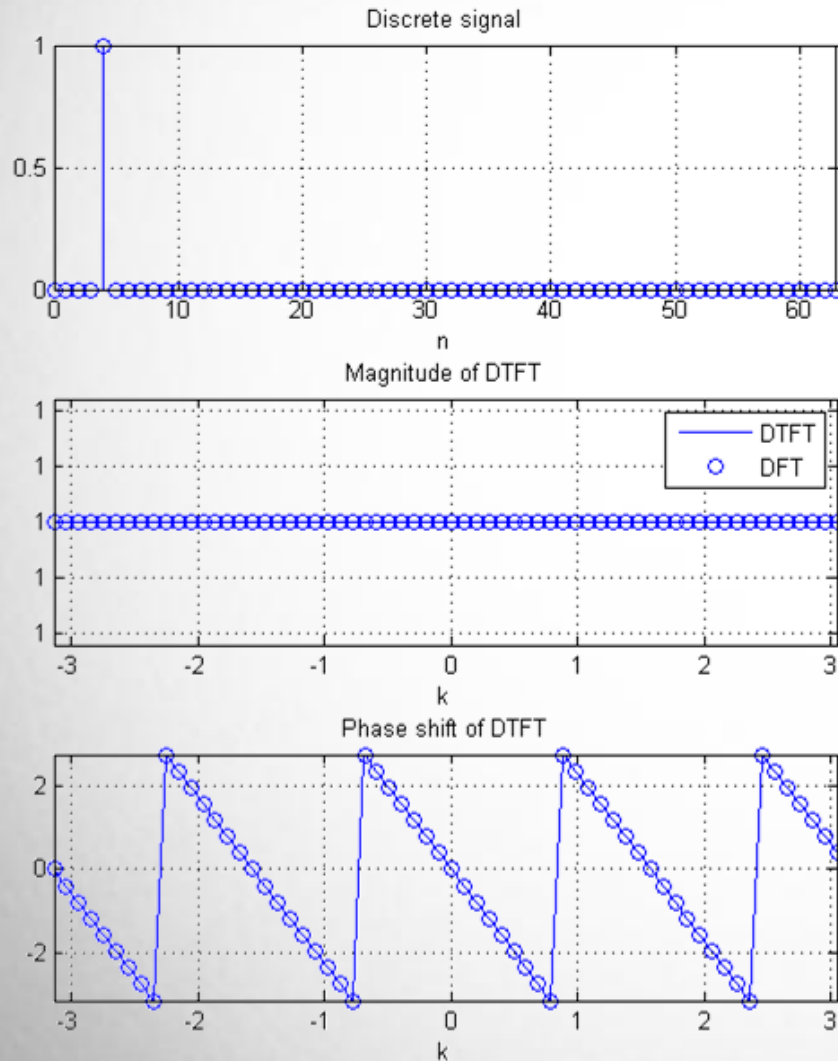
DTFT/DFT γνωστών ακολουθιών

❖ Κρουστική ακολουθία $\delta[n]$



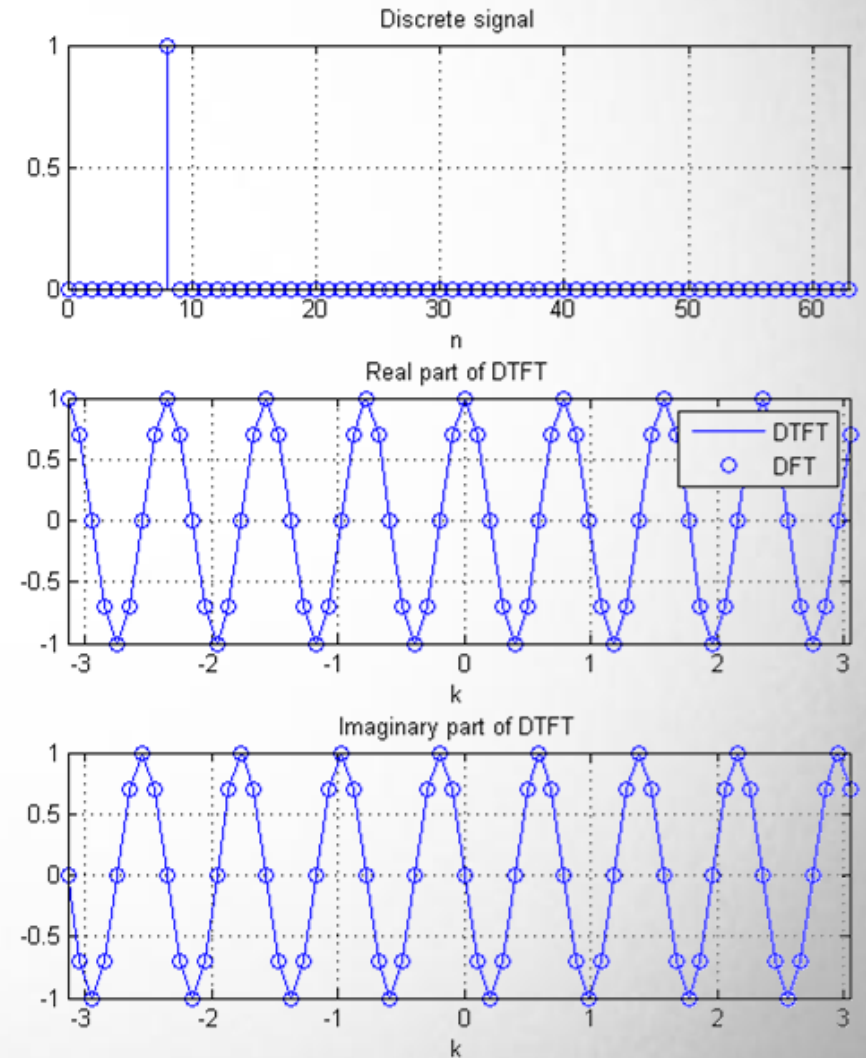
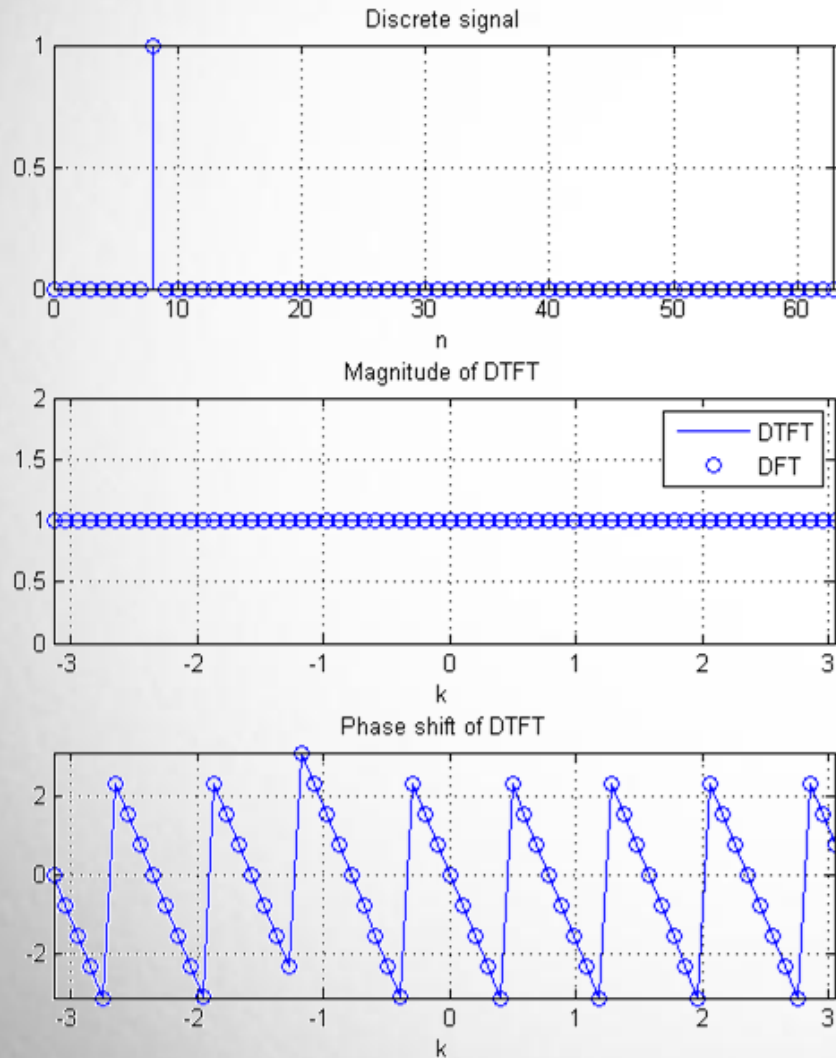
DTFT/DFT γνωστών ακολουθιών

❖ Κρουστική ακολουθία $\delta[n-4]$



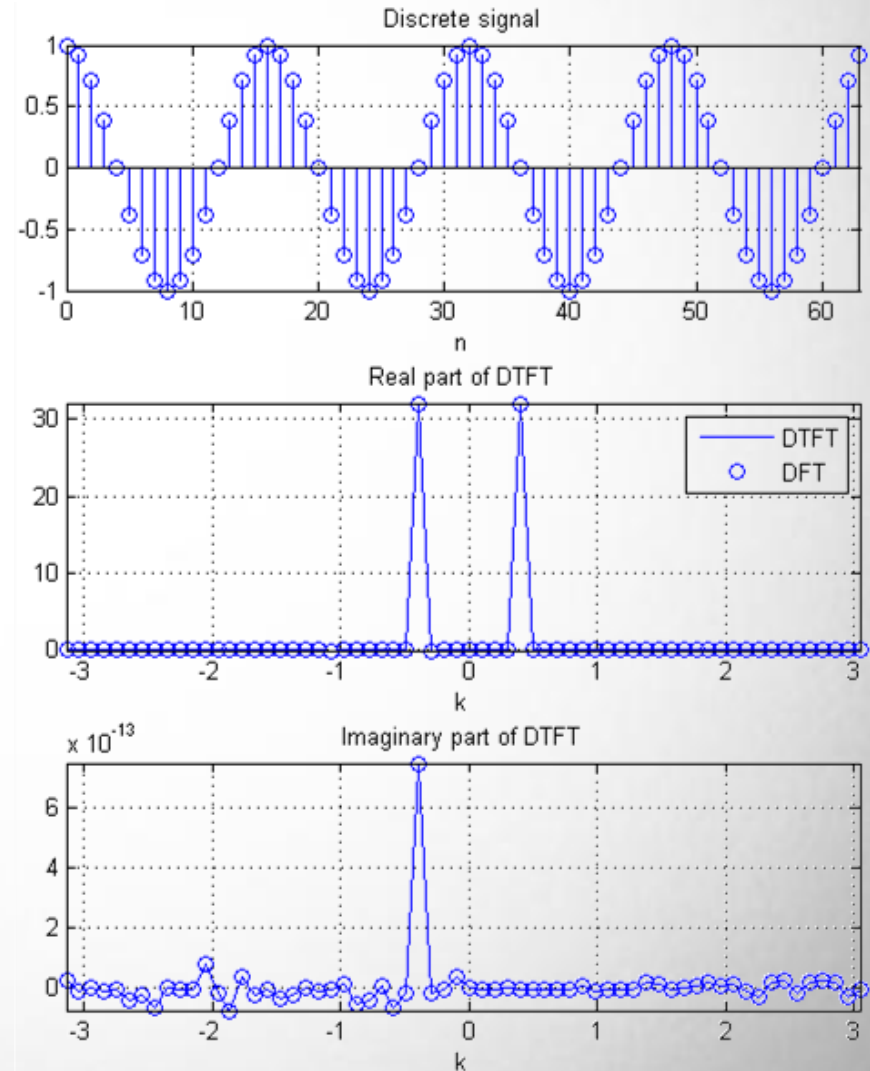
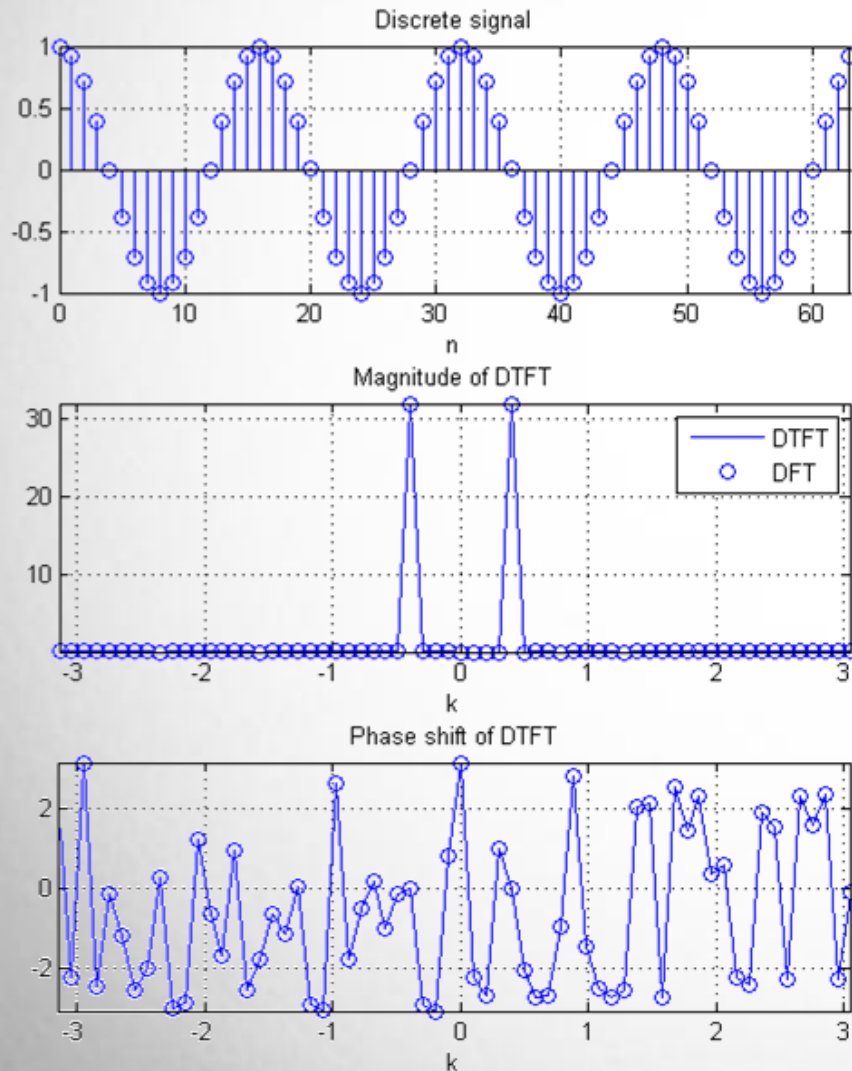
DTFT/DFT γνωστών ακολουθιών

❖ Κρουστική ακολουθία $\delta[n-8]$



DTFT/DFT γνωστών ακολουθιών

❖ Ημιτονοειδής ακολουθία $\cos(2\pi n/16)$ – Δυσικότητα (Duality)



Περιοδική και κυκλική συνέλιξη

- ❖ Αν $\tilde{x}(n)$ και $\tilde{y}(n)$ περιοδικές ακολουθίες με ίδια πρωτεύουσα περίοδο N , η **περιοδική συνέλιξη** τους γράφεται και ορίζεται:

$$\{\tilde{x} \otimes \tilde{y}\}(n) = \tilde{x}(n) \otimes \tilde{y}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) \cdot \tilde{y}(n - k)$$

- ❖ Μπορούμε να γράψουμε ακόμη:

$$\tilde{x}(n) = x(n \bmod N), \quad \tilde{y}(n) = y(n \bmod N)$$

με:

$$x(n) = \tilde{x}(n) \cdot [u(n) - u(n - N)], \quad y(n) = \tilde{y}(n) \cdot [u(n) - u(n - N)]$$

σήματα πεπερασμένου μήκους N

- ❖ Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε:

$$\tilde{x}(n) \otimes \tilde{y}(n) = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}(k) \cdot \tilde{y}(n - k) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot y((n - k) \bmod N)$$

Κυκλική συνέλιξη σημάτων πεπερασμένου μήκους N

Κυκλική συνέλιξη

- ❖ Η κυκλική συνέλιξη σημάτων πεπερασμένου μήκους N σημείων γράφεται:

$$x(n) \circledast y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot y((n - k) \bmod N)$$

- ❖ Η κυκλική συνέλιξη είναι μια περιοδική συνέλιξη από την οποία διατηρούμε τα αποτελέσματα μέσα σε μια περίοδο

Περιοδική και κυκλική συνέλιξη

❖ Έστω δύο περιοδικά σήματα με πρωτεύουσα περίοδο $N=4$:

n	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$\tilde{y}(n)$	...	3	0	4	2	3	0	4	2	...
$\tilde{x}(n)$	...	4	2	1	3	4	2	1	3	...

➤ Σε μια περίοδο: $n = 0 \dots 3, x(n) = [4 \ 2 \ 1 \ 3], y(n) = [3 \ 0 \ 4 \ 2]$

k	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
$\tilde{y}(k)$	...	3	0	4	2	3	0	4	2	...
$\tilde{x}(k)$	...	4	2	1	3	4	2	1	3	...
$\tilde{y}(-k)$	...	3	2	4	0	3	2	4	0	...
$\tilde{y}(1-k)$	...	0	3	2	4	0	3	2	4	...
$\tilde{y}(2-k)$	...	4	0	3	2	4	0	3	2	...
$\tilde{y}(3-k)$	...	2	4	0	3	2	4	0	3	...

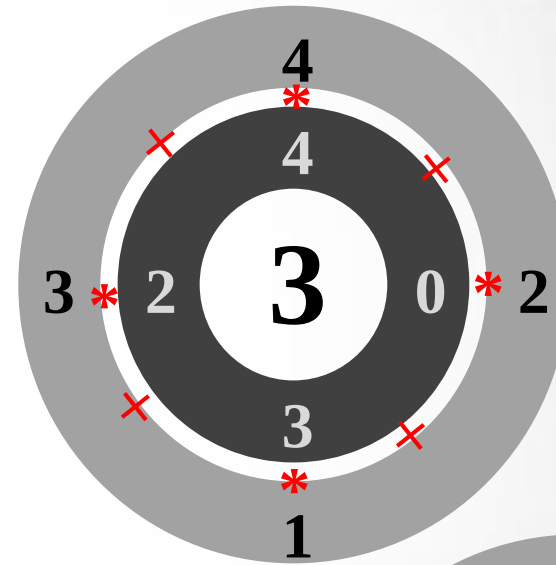
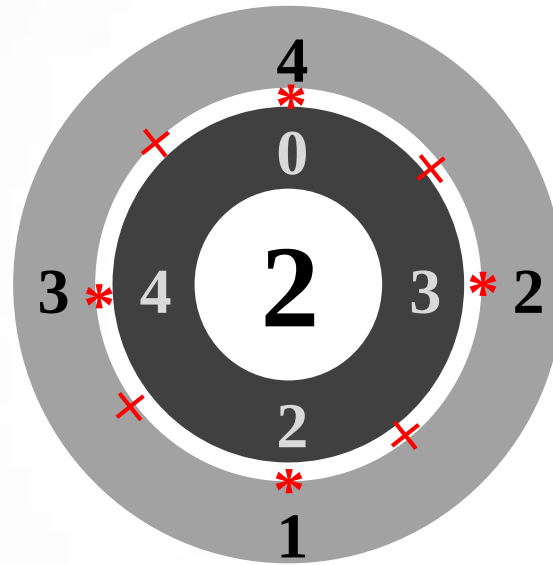
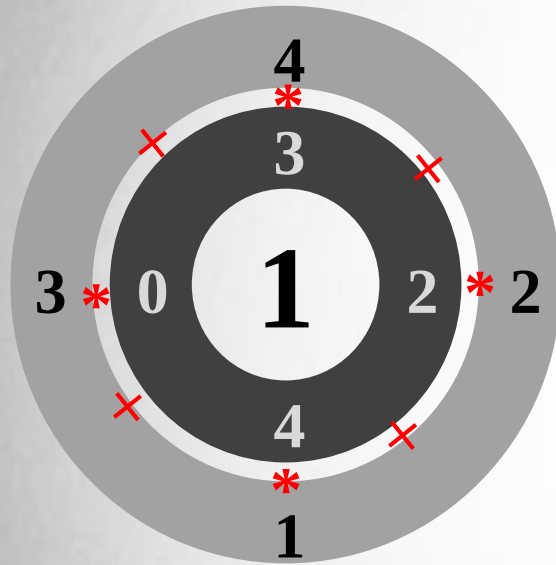
Κυκλική συνέλιξη

$\{\tilde{x} \otimes \tilde{y}\}(n)$
$\{\tilde{x} \otimes \tilde{y}\}(0) = 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 20$
$\{\tilde{x} \otimes \tilde{y}\}(1) = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 20$
$\{\tilde{x} \otimes \tilde{y}\}(2) = 4 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 25$
$\{\tilde{x} \otimes \tilde{y}\}(3) = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 25$

Περιοχή υπολογισμού κυκλικής συνέλιξης

Γιατί «κυκλική» η συνέλιξη;

❖ Σε μια περίοδο: $n = 0 \dots 3, x(n) = [4 \ 2 \ 1 \ 3], y(n) = [3 \ 0 \ 4 \ 2]$

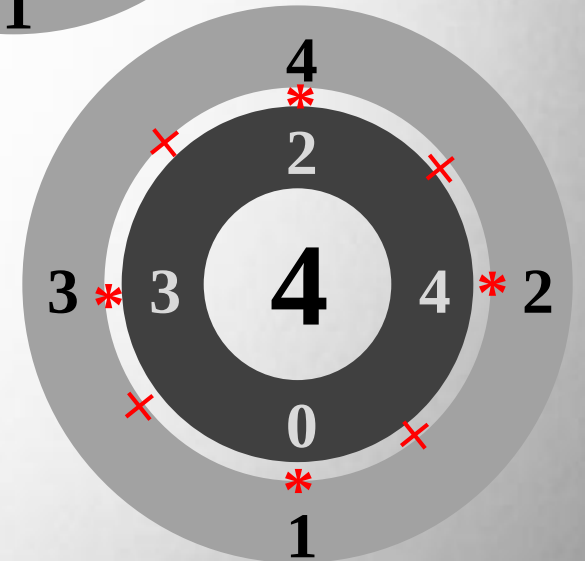


$$1^{\text{ος}} \text{ όρος: } 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 0 = 20$$

$$2^{\text{ος}} \text{ όρος: } 4 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 4 = 20$$

$$3^{\text{ος}} \text{ όρος: } 4 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 25$$

$$4^{\text{ος}} \text{ όρος: } 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 25$$



Σχέση συνέλιξης και DTFT

- ❖ Η γραμμική συνέλιξη και ο DTFT δύο σημάτων συνδέονται με τη σχέση:

$$\begin{aligned}x(n) * y(n) &\xleftrightarrow{FT} X(e^{j\omega}) \cdot Y(e^{j\omega}) \\ \mathcal{F}(x(n) * y(n)) &= \mathcal{F}(x(n)) \cdot \mathcal{F}(y(n))\end{aligned}$$

- ❖ Η περιοδική συνέλιξη και ο DFT δύο περιοδικών σημάτων συνδέονται με τη σχέση:

$$\tilde{x}(n) \otimes \tilde{y}(n) \xleftrightarrow{FT} \tilde{X}(k) \cdot \tilde{Y}(k)$$

- ❖ Η κυκλική συνέλιξη και ο DFT δύο πεπερασμένου μήκους σημάτων συνδέονται με τη σχέση:

$$x(n) \circledast y(n) \xleftrightarrow{FT-N} X(k) \cdot Y(k)$$

Zero padding (γέμισμα με μηδενικά)

❖ Για σήματα διαφορετικού πεπερασμένου μήκους εφαρμόζεται η τεχνική zero padding:

$$x(n), N_1 \text{ και } y(n), N_2$$

$$x_p(n) = \{x(n), 0: N_2 - 1\}, \quad y_p(n) = \{y(n), 0: N_1 - 1\}$$

➤ Τελικά τα σήματα (x_p, y_p) αποκτούν το ίδιο μήκος $N_1 + N_2 - 1$

➤ Ισχύει η σχέση:

$$x(n) * y(n) = x_p(n) \odot y_p(n)$$

Συνέλιξη με zero padding

❖ Έστω $x = [2 \ 4 \ 1 \ -1]$, $y = [1 \ 3 \ 2]$, τότε με zero padding έχουμε (για $N_1 = 4$, $N_2 = 3$, $N = 4 + 3 - 1 = 6$):

$$x_p = [2 \ 4 \ 1 \ -1 \ 0 \ 0], y_p = [1 \ 3 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0]$$

➤ η γραμμική και η κυκλική συνέλιξη οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα:

2	4	1	-1	$x*y$
1				2
3	1			10
2	3	1		17
	2	3	1	10
		2	3	-1
			2	-2

2	4	1	-1	0	0	$x_p \odot y_p$
1	0	0	0	2	3	2
3	1	0	0	0	2	10
2	3	1	0	0	0	17
0	2	3	1	0	0	10
0	0	2	3	1	0	-1
0	0	0	2	3	1	-2