ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER
ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER
ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier – DFT

Διακριτός μετασχηματισμός συνημιτόνου
DCT – discrete cosine transform

Η σχέση $g_0(n) = \frac{1}{\sqrt{N}},\ g_k(n) = \sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{\pi}{2N}k(2n+1))$ για k=1..N-1 και n=0,..,N-1

αποτελεί «πυρήνα» (kernel) δημιουργίας ορθοκανονικών διανυσμάτων για κάθε τιμή του N.
Στην περίπτωση αυτή οι συντελεστές c_k (δηλαδή οι προβολές του x στα g_k) δίνονται (*):

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1} x[n],\ c_k = \sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{n=0}^{N-1}\cos(\frac{\pi}{2N}k\cdot(2n+1))\cdot x[n] \text{ για k=1..N-1}$$

Η σχέση αυτή εκφράζει το **μονοδιάστατο Διακριτό Μετασχηματισμό Συνημιτόνου** (DCT)

Οι τιμές x[n] προκύπτουν έτσι: $$x[n] = \frac{c_0}{\sqrt{N}} + \sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{k=1}^{N-1} c_k \cdot\cos(\frac{\pi}{2N}k(2n+1))$$

Η σχέση αυτή εκφράζει τον **αντίστροφο μονοδιάστατο Διακριτό Μετασχηματισμό Συνημιτόνου** (inverse DCT – iDCT)

$(*)$με αντικατάσταση των g_k στις σχέσεις $c_i = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]g_i[n]$

Μετασχηματισμός Fourier

- Ο μετασχηματισμός Fourier
  - είναι **θεμελιώδους σημασίας στην ανάλυση** των σημάτων και των συστημάτων συνεχούς ή διακριτής ανεξάρτητης μεταβλητής
  - περιοδικές συναρτήσεις και ακολουθίες αναλύονται σε **αθροίσματα όρων** που καθένας τους εκφράζει μία αρμονική ταλάντωση
- Θα αναφερθούμε σε
  - Διακριτό μετασχηματισμό Fourier (**Discrete Fourier Transform, DFT**)
  - Διακριτή σειρά Fourier (**Discrete Fourier Series, DFS**)
  - Μετασχηματισμό Fourier διακριτού χρόνου (**Discrete Time Fourier Transform, DTFT**)
  - Αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier (**Inverse Fourier Transform**)

Εισαγωγή στους υπολογισμούς Μ/Σ μιγαδικών ΣΔΧ

- Οι σχέσεις για την ερμηνεία ενός Μ/Σ στην περίπτωση των **πραγματικών σημάτων πεπερασμένου μήκους Ν**
  - είναι αποτέλεσμα του γεγονότος ότι αναλύσαμε το σήμα σε μία **βάση ορθοκανονικών διανυσμάτων** (μέτρο ίσο με τη μονάδα και είναι μεταξύ τους κάθετα)
    - $x^T y \quad x, y \in R^N$
- Στην περίπτωση μιγαδικών σημάτων
  - Μιγαδικός $z = a + bj$, αν $z = \begin{bmatrix} a \\ bj \end{bmatrix}$
    - (?) $|z|^2 ? = \ z^T z = [a \quad bj] \begin{bmatrix} a \\ bj \end{bmatrix} = a^2 + (bj)^2 = a^2 - b^2$
    - όμως: $|x|^2 = \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)^2 = a^2 + b^2 \neq \ z^T z$
    - άρα χρειάζεται διαφορετική προσέγγιση:
      - ✓ αν $\bar{z} = a - bj$ ο συζυγής τότε: $\bar{z}^T z = [a \quad -bj] \begin{bmatrix} a \\ bj \end{bmatrix} = a^2 + (-bj)^2 = a^2 - b^2(-j)^2 = a^2 + b^2 = |x|^2$

Εισαγωγή στους υπολογισμούς Μ/Σ μιγαδικών ΣΔΧ

- Δύο μιγαδικά διανύσματα $\boldsymbol{g_0}$, $\boldsymbol{g_1}$ λέγονται **ορθομοναδιαία αν**

$$\bar{\boldsymbol{g}}^T{}_0 \cdot \boldsymbol{g}_0 = \bar{\boldsymbol{g}}^T{}_1 \cdot \boldsymbol{g}_1 = 1$$
$$\bar{\boldsymbol{g}}^T{}_0 \cdot \boldsymbol{g}_1 = \bar{\boldsymbol{g}}^T{}_1 \cdot \boldsymbol{g}_0 = 0$$

- Στη γραμμική άλγεβρα ο **συζυγής** ενός μιγαδικού πίνακα $\boldsymbol{A}$, γράφεται $\bar{\boldsymbol{A}}$ και αποτελείται από τα συζυγή στοιχεία του $\boldsymbol{A}$
- Ο **ανάστροφος του συζυγούς** του $\boldsymbol{A}$, δηλαδή ο $\bar{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{T}}$, λέγεται **αναστροφοσυζυγής** του $\boldsymbol{A}$ ή $\boldsymbol{A}$ **Ερμιτιανός** και γράφεται $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{H}}$
- Άρα οι σχέσεις για τα ορθομοναδιαία γράφονται:

$$\boldsymbol{g}^{\boldsymbol{H}}{}_0 \cdot \boldsymbol{g}_0 = \boldsymbol{g}^H{}_1 \cdot \boldsymbol{g}_1 = 1$$
$$\boldsymbol{g}^H{}_0 \cdot \boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{g}^H{}_1 \cdot \boldsymbol{g}_0 = 0$$

Εισαγωγή στους υπολογισμούς Μ/Σ μιγαδικών ΣΔΧ

- Για N ορθομοναδιαία μιγαδικά διανύσματα g0, g1,…, gN-1 ο συνολικός πίνακας των διανυσμάτων είναι:

$$\mathrm{G}^H = \begin{bmatrix} {g_0}^H \\ {g_1}^H \\ \vdots \\ {g_{N-1}}^H \end{bmatrix}$$

  - Ισχύουν οι σχέσεις: $G^H G = I$ και $G^H = G^{-1}$

- Κατ' αναλογία με την περίπτωση προβολής διανύσματος πραγματικών παραμέτρων για τα μιγαδικά διανύσματα:

$$c_k = {g_k}^H x = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{g}_k[n] \cdot x[n]$$

$C = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-1} \end{bmatrix} = G^H \cdot x$ και αντίστοιχα

$x = G \cdot C$ (λόγω $G^H = G^{-1}$) $\Rightarrow x[n] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k g_k[n]$

  - το **ανάπτυγμα του *x[n]* σε σειρά** του $g_k[n]$

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT)

❖ Πυρήνας παραγωγής **ορθομοναδιαίων** διανυσμάτων:

$$\mathbf{g}_k[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{\sqrt{N}} W_N^{kn} \quad \text{όπου} \quad W_N = e^{j\frac{2\pi}{N}}$$

❖ Η βάση είναι ορθομοναδιαία διότι ισχύουν οι σχέσεις **μοναδιαίου μήκους** και **καθετότητας**: (για k≠m)

$$\mathbf{g}_k^H \cdot \mathbf{g}_k = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{0} = \frac{N}{N} = 1$$

$$\mathbf{g}_m^H \cdot \mathbf{g}_k = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j\frac{2\pi}{N}mn} \frac{1}{\sqrt{N}} e^{j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)n} = \frac{1-e^{j\frac{2\pi}{N}N(k-m)}}{1-e^{j\frac{2\pi}{N}(k-m)}} = 0$$

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier (DFT)

- Οι συντελεστές ενός πεπερασμένου μήκους N σήματος $\boldsymbol{x}$ είναι

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot x[n]$$

  - Η σχέση αποτελεί το **μοναδιαίο (unitary) Διακριτό Μετασχηματισμό Fourier** (Discrete Time Fourier Transform - DFT) N-σημείων

- Ανάπτυγμα σε σειρά ενός πεπερασμένου μήκους N σήματος $\boldsymbol{x}$

$$x[n] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} c_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

  - Η σχέση αποτελεί το **ανάπτυγμα στην αντίστοιχη σειρά**

- Αν θέσουμε $C_k = ck\sqrt{N}$

Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier - DFT

$C_k = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot x[n]$, ή αλλιώς: $\boxed{X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \cdot x[n]}$

$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} C_k \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$, ή αλλιώς: $\boxed{x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j\frac{2\pi}{N}kn}}$

Διακριτή Σειρά Fourier - DFS

DFT - Παράδειγμα

❖ Για το σήμα **x**=[1 3 2]^T, N=3, n=0,1,2, k=0,1,2, τα ορθομοναδιαία διανύσματα βάσης είναι:

$$g_0 = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi}{3}0\cdot 0} \\ e^{\frac{2\pi}{3}0\cdot 1} \\ e^{\frac{2\pi}{3}0\cdot 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$g_1 = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi}{3}1\cdot 0} \\ e^{\frac{2\pi}{3}1\cdot 1} \\ e^{\frac{2\pi}{3}1\cdot 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + j\cdot\sin(\frac{2\pi}{3}) \\ \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + j\cdot\sin(\frac{4\pi}{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$g_2 = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi}{3}2\cdot 0} \\ e^{\frac{2\pi}{3}2\cdot 1} \\ e^{\frac{2\pi}{3}2\cdot 2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + j\cdot\sin(\frac{4\pi}{3}) \\ \cos\left(\frac{8\pi}{3}\right) + j\cdot\sin(\frac{8\pi}{3}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

DFT - Παράδειγμα

- Συνεπώς ο πίνακας των ορθομοναδιαίων διανυσμάτων είναι

$$G = [g^0{}_3 \;\; g^1{}_3 \;\; g^2{}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

- με ερμιτιανό πίνακα (Hermitian)

$$G^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

- Ο DFT είναι

$$C = G^H x = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -\frac{3}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

DFT - Παράδειγμα

❖ Οι τιμές του σήματος ανακτώνται από τις τιμές c_k του DFT

$$x = \frac{1}{3} G \cdot C = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -\frac{3}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

DFT - Παράδειγμα

❖ Για το σήμα **x**=[0 0 1 1 1]^T, N=5, n,k=0,…4, τα ορθομοναδιαία διανύσματα βάσης είναι:

$$g_0 = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi}{5}0\cdot 0} \\ e^{\frac{2\pi}{5}0\cdot 1} \\ e^{\frac{2\pi}{5}0\cdot 2} \\ e^{\frac{2\pi}{5}0\cdot 3} \\ e^{\frac{2\pi}{5}0\cdot 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad g_1 = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi}{5}1\cdot 0} \\ e^{\frac{2\pi}{5}1\cdot 1} \\ e^{\frac{2\pi}{5}1\cdot 2} \\ e^{\frac{2\pi}{5}1\cdot 3} \\ e^{\frac{2\pi}{5}1\cdot 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + j\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \\ \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + j\cdot\sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) \\ \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + j\cdot\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) \\ \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + j\cdot\sin\left(\frac{8\pi}{5}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.3090 + j\cdot 0.9511 \\ -0.8090 + j\cdot 0.5878 \\ -0.8090 - j\cdot 0.5878 \\ 0.3090 - j\cdot 0.9511 \end{bmatrix}$$

$$g_2 = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi}{5}2\cdot 0} \\ e^{\frac{2\pi}{5}2\cdot 1} \\ e^{\frac{2\pi}{5}2\cdot 2} \\ e^{\frac{2\pi}{5}2\cdot 3} \\ e^{\frac{2\pi}{5}2\cdot 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.8090 + j\cdot 0.5878 \\ 0.3090 - j\cdot 0.9511 \\ 0.3090 + j\cdot 0.9511 \\ -0.8090 - j\cdot 0.5878 \end{bmatrix} \qquad g_3 = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi}{5}3\cdot 0} \\ e^{\frac{2\pi}{5}3\cdot 1} \\ e^{\frac{2\pi}{5}3\cdot 2} \\ e^{\frac{2\pi}{5}3\cdot 3} \\ e^{\frac{2\pi}{5}3\cdot 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.8090 - j\cdot 0.5878 \\ 0.3090 + j\cdot 0.9511 \\ 0.3090 - j\cdot 0.9511 \\ -0.8090 + j\cdot 0.5878 \end{bmatrix}$$

$$g_4 = \begin{bmatrix} e^{\frac{2\pi}{5}4\cdot 0} \\ e^{\frac{2\pi}{5}4\cdot 1} \\ e^{\frac{2\pi}{5}4\cdot 2} \\ e^{\frac{2\pi}{5}4\cdot 3} \\ e^{\frac{2\pi}{5}4\cdot 4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.3090 - j\cdot 0.9511 \\ -0.8090 - j\cdot 0.5878 \\ -0.8090 + j\cdot 0.5878 \\ 0.3090 + j\cdot 0.9511 \end{bmatrix}$$

DFT - Παράδειγμα

❖ Συνεπώς ο πίνακας των ορθομοναδιαίων διανυσμάτων είναι

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0.3090 + j\cdot 0.9511 & -0.8090 + j\cdot 0.5878 & -0.8090 - j\cdot 0.5878 & 0.3090 - j\cdot 0.9511 \\ 1 & -0.8090 + j\cdot 0.5878 & 0.3090 - j\cdot 0.9511 & 0.3090 + j\cdot 0.9511 & -0.8090 - j\cdot 0.5878 \\ 1 & -0.8090 - j\cdot 0.5878 & 0.3090 + j\cdot 0.9511 & 0.3090 - j\cdot 0.9511 & -0.8090 + j\cdot 0.5878 \\ 1 & 0.3090 - j\cdot 0.9511 & -0.8090 - j\cdot 0.5878 & -0.8090 + j\cdot 0.5878 & 0.3090 + j\cdot 0.9511 \end{bmatrix}$$

❖ με ερμιτιανό πίνακα (Hermitian)

$$G^{\mathrm{H}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0.3090 - j\cdot 0.9511 & -0.8090 - j\cdot 0.5878 & -0.8090 + j\cdot 0.5878 & 0.3090 + j\cdot 0.9511 \\ 1 & -0.8090 - j\cdot 0.5878 & 0.3090 + j\cdot 0.9511 & 0.3090 - j\cdot 0.9511 & -0.8090 + j\cdot 0.5878 \\ 1 & -0.8090 + j\cdot 0.5878 & 0.3090 - j\cdot 0.9511 & 0.3090 + j\cdot 0.9511 & -0.8090 - j\cdot 0.5878 \\ 1 & 0.3090 + j\cdot 0.9511 & -0.8090 + j\cdot 0.5878 & -0.8090 - j\cdot 0.5878 & 0.3090 - j\cdot 0.9511 \end{bmatrix}$$

❖ O DFT είναι

$$C = G^H x = G^H \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1.309 + j\cdot 0.951 \\ -0.191 + j\cdot 0.588 \\ -0.191 - j\cdot 0.588 \\ -1.309 - j\cdot 0.951 \end{bmatrix}$$

DFT - Παράδειγμα

❖ Οι τιμές του σήματος ανακτώνται από τις τιμές c_k του DFT

$$x = \frac{1}{5} G \cdot C = \frac{1}{5} G \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ -1.309 + j \cdot 0.951 \\ -0.191 + j \cdot 0.588 \\ -0.191 - j \cdot 0.588 \\ -1.309 - j \cdot 0.951 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$