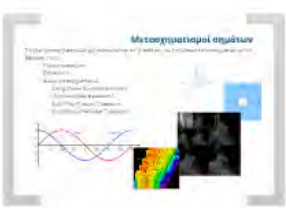
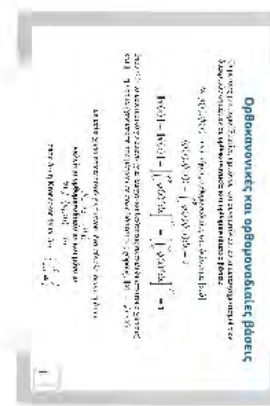
ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER
ΑΝΑΛΥΣΗ FOURIER
ΔΙΑΚΡΙΤΩΝ ΣΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ





Αναπαράσταση σημάτων

Σήματα διακριτού χρόνου μπορούν να αναπαρίστανται με πολλαπλούς και διαφορετικούς τρόπους

- Οι ημιτονοειδείς και οι μιγαδικές εκθετικές ακολουθίες παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην αναπαράσταση σημάτων διακριτού χρόνου
  - αποτελούν ιδιοσυναρτήσεις* LSI συστημάτων
  - η απόκριση LSI συστήματος σε ημιτονοειδή είσοδο είναι ημιτονοειδούς μορφής με πλάτος και φάση που ορίζεται από το σύστημα
  - αυτή η ιδιότητά τους τις καθιστά ιδιαίτερα σημαντικές στη θεωρία γραμμικών συστημάτων

$* \, Tf = \lambda f$, $\lambda \in C$ οι ιδιοτιμές

LSI: $y[n] = Tx[n] = \lambda x[n]$, αν $x[n]$ ιδιοσυνάρτηση του T

$$x[n] = e^{j\omega n} \xrightarrow{h[n] - \text{κρ. απ.}} y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega(n-k)} = e^{j\omega n} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k} \right)$$

Αν ορίσουμε $H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k}$

Τότε προκύπτει $y[n] = H(e^{j\omega}) e^{j\omega n}$

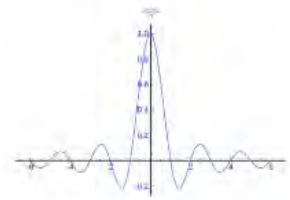
$e^{j\omega n}$ η ιδιοσυνάρτηση και $H(e^{j\omega})$ η ιδιοτιμή $\rightarrow$ καλείται **Απόκριση Συχνότητας**

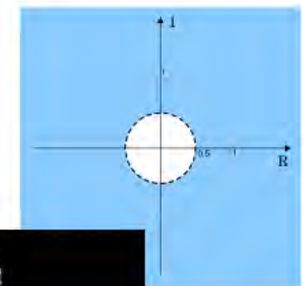
Frequency Response

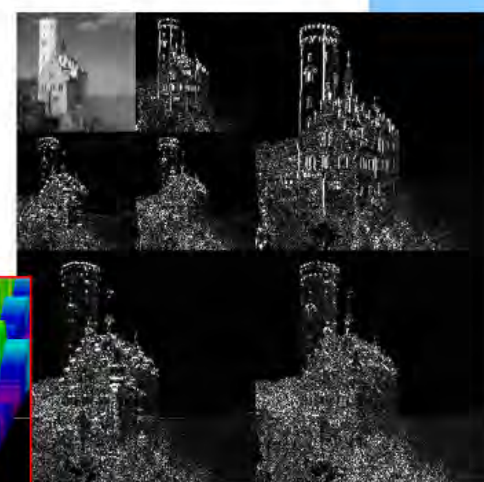
Μετασχηματισμοί σημάτων

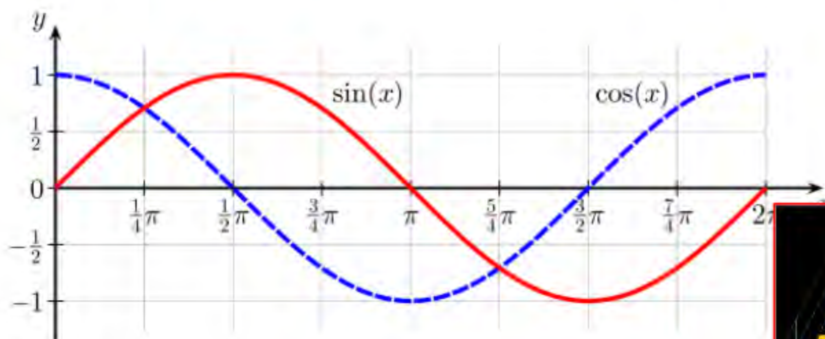
Πλήθος μετασχηματισμών χρησιμοποιούνται στην ανάλυση των σημάτων και συστημάτων με πιο βασικούς τους:

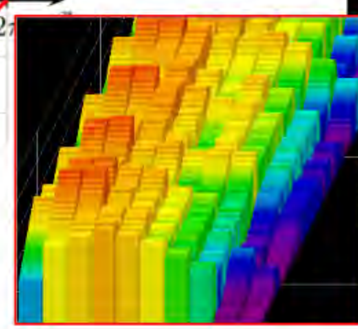
- Fourier transform
- Z transform
- Άλλοι μετασχηματισμοί
  - Συνημιτόνου (Cosine transform)
  - Ημιτόνου (Sine transform)
  - Sort-Time Fourier Transform
  - Κυματιδίων (Wavelet Transform)











Ορθοκανονικές και ορθομοναδιαίες βάσεις

Οι μετασχηματισμοί Fourier, ημιτόνου και συνημιτόνου, είναι μετασχηματισμοί των διακριτών σημάτων σε **ορθοκανονικές και ορθομοναδιαίες βάσεις**

Αν $\varphi(x), \psi(x)$ συναρτήσεις ορθομοναδιαίες στο διάστημα $[a, b]$

$$\langle \varphi(x), \psi(x) \rangle = \int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx = 0$$

$$\|\varphi(x)\| = \|\psi(x)\| = \left[\int_a^b \varphi(x)^2 dx\right]^{1/2} = \left[\int_a^b \psi(x)^2 dx\right]^{1/2} = 1$$

όπου <,> το εσωτερικό γινόμενο (για έλεγχο καθετότητας σε πολυδιάστατους χώρους) και || || η νόρμα (γενίκευση του μέτρου σε πολυδιάστατους χώρους, $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$)

Σε κάθε χώρο εσωτερικού γινομένου, ένα σύνολο διανυσμάτων

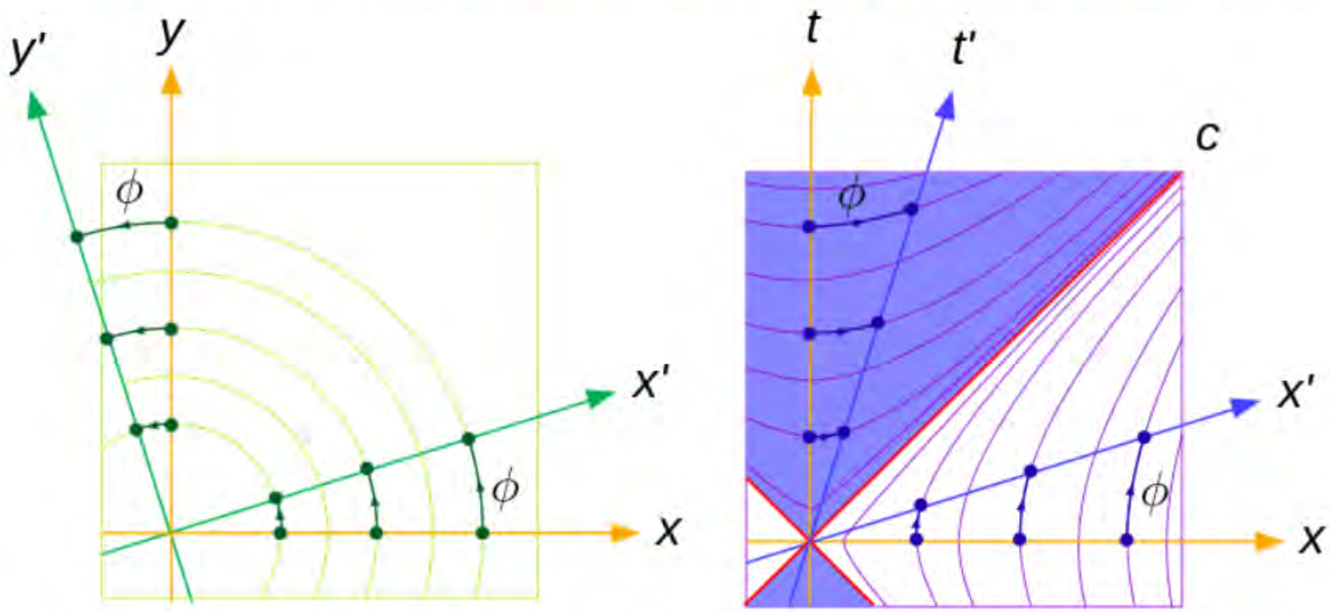
$$\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$$

καλείται ορθομοναδιαίο αν και μόνο αν

$$\forall i, j \colon \langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}$$

όπου δ_{ij} η Kronecker delta: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$

Ορθοκανονικές και ορθομοναδιαίες βάσεις



Καθετότητα (ορθοκανονικότητα) και περιστροφή συστημάτων συντεταγμένων

αριστερά: Ευκλείδειος χώρος με τυπική κυκλική περιστροφή κατά γωνία φ
δεξιά: Χωροχρόνος Minkowski με περιστροφή κατά υπερβολική γωνία φ (όπου πάνω στις c χωρογραμμές-worldlines φωτός, ένα διάνυσμα είναι κάθετο με τον εαυτό του)

Πηγή: http://en.wikipedia.org/wiki/Orthogonality

Ο μετασχηματισμός Fourier

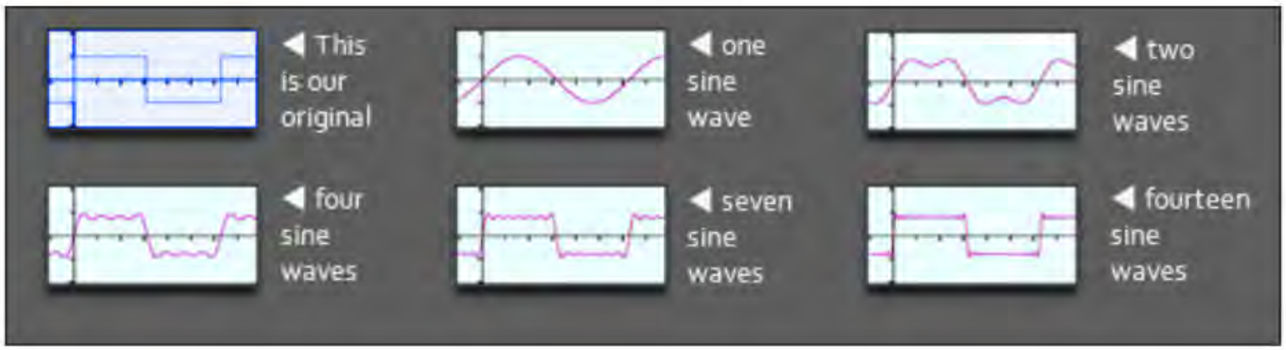
Το 1811, ο Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), 43-χρονος Νομάρχης της Γαλλικής περιφέρειας του Isère, κέρδισε σε επιστημονικό διαγωνισμό στο αντικείμενο της μετάδοσης θερμότητας που διοργανώθηκε από τη Γαλλική Ακαδημία Επιστημών, εισάγοντας μια πρωτότυπη αναλυτική τεχνική (που ονομάζουμε σήμερα μετασχηματισμό Fourier).

- Παρόλα αυτά η εργασία δε δημοσιεύθηκε γιατί κρίθηκε ότι ο συλλογισμός δεν είχε «κομψότητα». Μέχρι τα τέλη της δεκαετίας του 1970 ο Fourier δεν εμφανίζονταν στη μεγάλη Γαλλική Εγκυκλοπαίδεια Encyclopædia Universalis.
- Σήμερα, το όνομά του βρίσκεται παντού
- Ο μετασχηματισμός Fourier transform είναι ένας τρόπος αποσύνθεσης σημάτων στις συχνότητες που το αποτελούν και εφαρμόζεται
  - στη δημιουργία και φιλτράρισμα σημάτων κινητών/WiFi
  - στη συμπίεση σημάτων ήχου, εικόνων και βίντεο
  - στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων
  - …….

Laurent Demanet (MIT-Math): “You don’t really study the Fourier transform for what it is. You take a class in signal processing, and there it is. You don’t have any choice.”

Ο μετασχηματισμός Fourier

Σε σχέση με το αντικείμενο μελέτης μας, αυτό που ο Fourier ανακάλυψε ήταν ο γενικός κανόνας ότι κάθε σήμα, όσο σύνθετο κι αν είναι, μπορεί να αναπαρασταθεί από ένα άθροισμα ημιτονοειδών συναρτήσεων διαφορετικού πλάτους και συχνότητας



Πηγή: http://www.dspdimension.com/admin/dft-a-pied/

Ο μετασχηματισμός Fourier

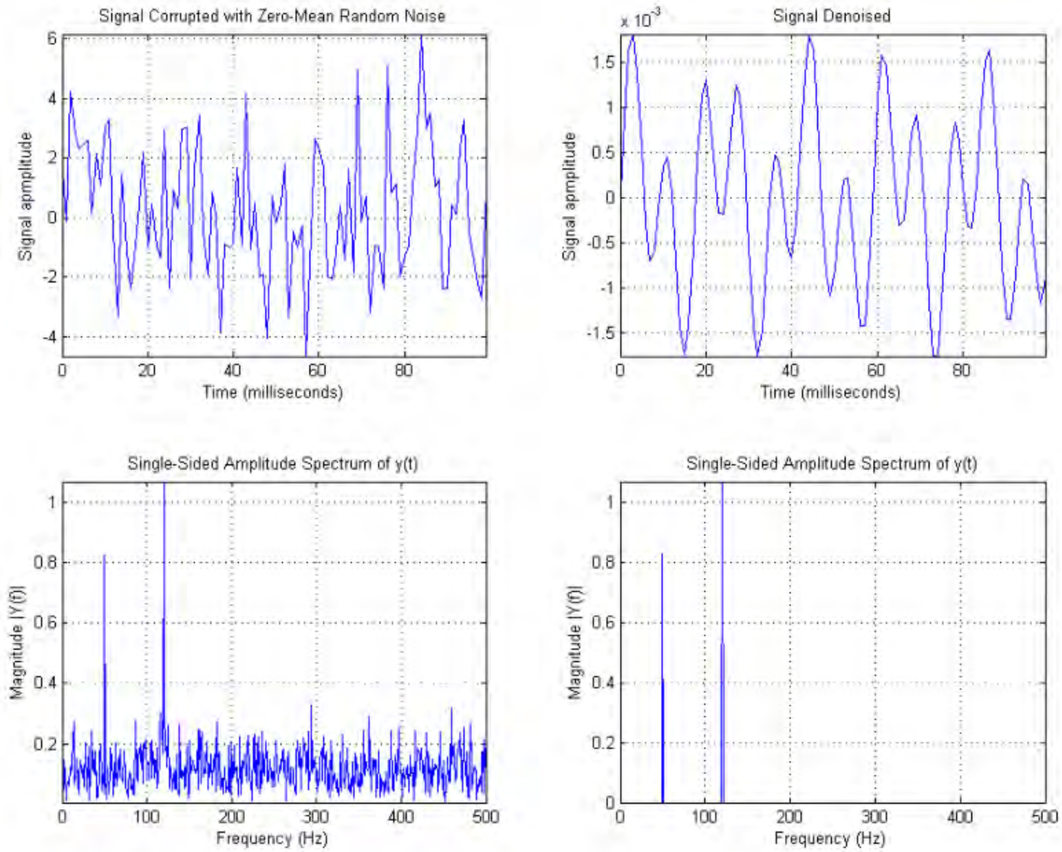
Ο M/F εμφανίζεται με τρεις μορφές:

- Τυπικός μετασχηματισμός όπως αρχικά ορίστηκε (FT–Fourier Transform)
- Ως σειρά Fourier (Fourier Series)
- Ως Διακριτός M/F (DFT–Discrete Fourier Transform)

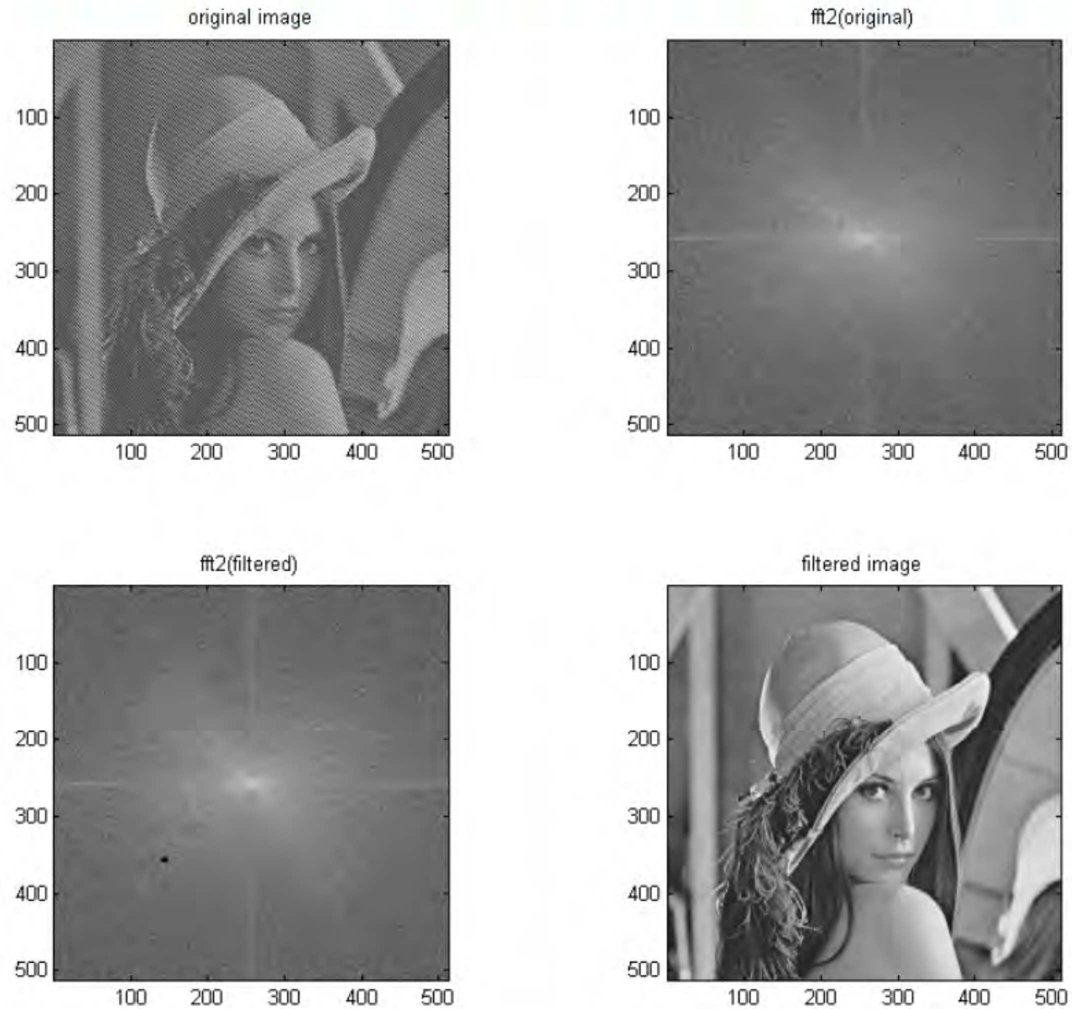
Στην πραγματικότητα ο DFT είναι που αναβίωσε το μετασχηματισμό Fourier.

- Το 1965, οι επιστήμονες James Cooley και John Tukey περιέγραψαν έναν αλγόριθμο υπό την ονομασία Γρήγορος M/F (FFT–Fast Fourier Transform), που καθιστούσε πολύ ευκολότερο τον υπολογισμό του DFT σε υπολογιστή
- Ο DFT έγινε ένας πρακτικός τρόπος επεξεργασίας σημάτων διακριτού χρόνου

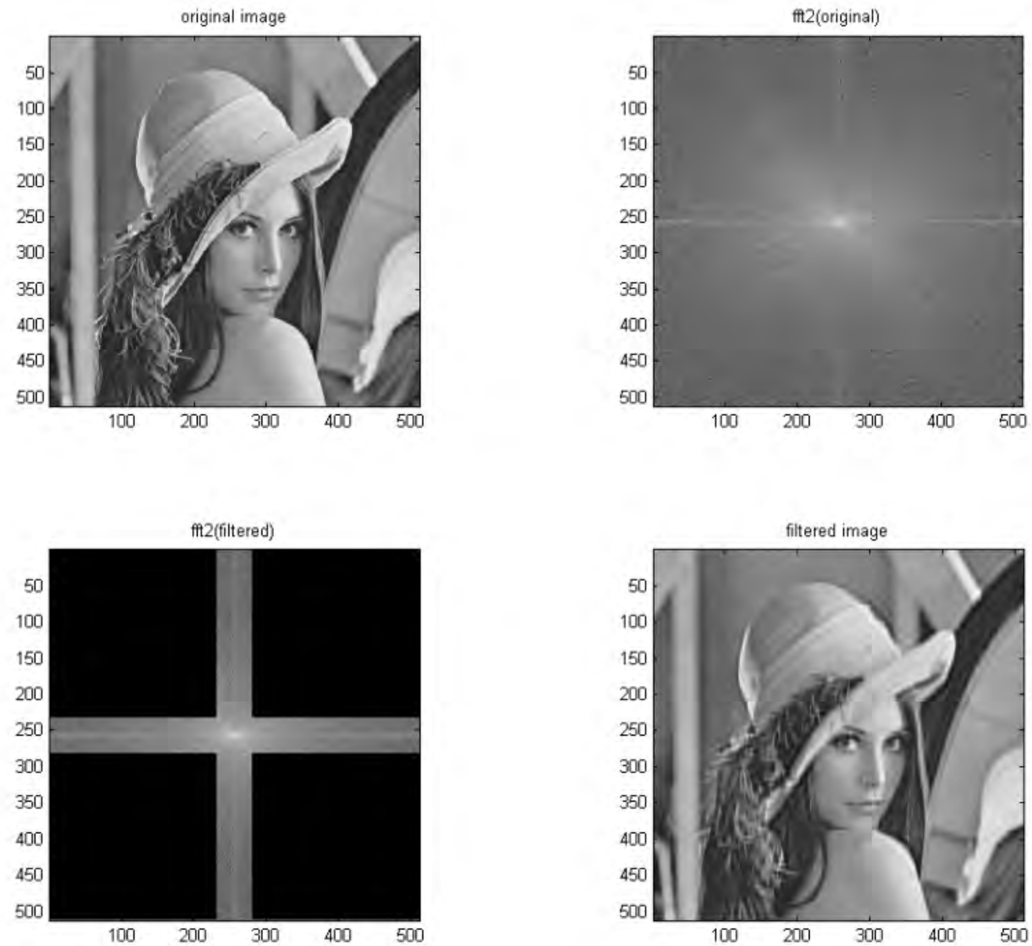
Ο μετασχηματισμός Fourier 1D σήματος



Ο μετασχηματισμός Fourier 2D σήματος

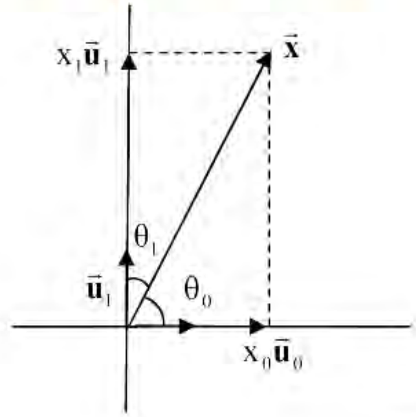


Ο μετασχηματισμός Fourier 2D σήματος



Ερμηνεία με διανυσματική ανάλυση

Έστω η ακολουθία με μήκος $N = 2$: $n = 0 \dots 1, x[n] = [x_o, x_1]$



Αν αντιστοιχίσουμε στη $x[n]$ διάνυσμα $\vec{\boldsymbol{x}}$ με συντεταγμένες x_o, x_1

$\vec{\boldsymbol{x}} = x_o\overrightarrow{\boldsymbol{u_o}} + x_1\overrightarrow{\boldsymbol{u_1}}$

όπου $\overrightarrow{\boldsymbol{u_o}}$ και $\overrightarrow{\boldsymbol{u_1}}$ τα μοναδιαία διανύσματα των δύο διαστάσεων:

$\overrightarrow{\boldsymbol{u_o}} = (1{,}0), \qquad \overrightarrow{\boldsymbol{u_1}} = (0{,}1)$

Λόγω της καθετότητας των μοναδιαίων διανυσμάτων

(ορθομοναδιαία βάση) τα x_o, x_1 αποτελούν προβολές του x σε αυτά:

$x_0 = |\vec{\boldsymbol{x}}| \cos(\theta_o)\,, x_1 = |\vec{\boldsymbol{x}}| \cos(\theta_1)$

ή από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου: $x_0 = \vec{\boldsymbol{x}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{u_0}}$, $x_1 = \vec{\boldsymbol{x}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{u_1}}$

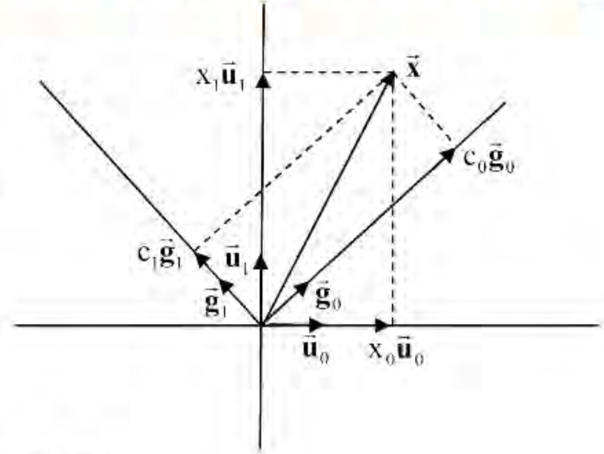
Ζεύγη κάθετων διανυσμάτων με μήκος 1 υπάρχουν άπειρου πλήθους, όπως π.χ.

$\left({}^{1}/_{\sqrt{2}}, {}^{1}/_{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-{}^{1}/_{\sqrt{2}}, {}^{1}/_{\sqrt{2}}\right)$ ή τα $\left({}^{1}/_{2}, {}^{\sqrt{3}}/_{2}\right)$, $\left(-{}^{\sqrt{3}}/_{2}, {}^{1}/_{\sqrt{2}}\right)$ ή τα $(0, -1), (1{,}0)$

Ερμηνεία με διανυσματική ανάλυση

Έστω τα κάθετα διανύσματα με μήκος 1:

$$\vec{\mathbf{g}}_0(g_{00},\ g_{01}) \qquad \vec{\mathbf{g}}_1(g_{10},\ g_{11})$$



Το διάνυσμα x γράφεται σαν άθροισμα: $\vec{\mathbf{x}} = c_0\vec{\mathbf{g}}_0 + c_1\vec{\mathbf{g}}_1$

όπου c_0 και c_1 οι προβολές του x στα g_0 και g_1

Οι συντεταγμένες αυτές δίνονται από τις σχέσεις:

$$c_0 = \vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{g}}_0 \ \text{και}\ c_1 = \vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{g}}_1$$

Αντικαθιστώντας το $\vec{x} = x_o\overrightarrow{u_o} + x_1\overrightarrow{u_1}$ προκύπτει ότι:

$$c_0 = (x_0\vec{\mathbf{u}}_0 + x_1\vec{\mathbf{u}}_1)\vec{\mathbf{g}}_0 = x_0\vec{\mathbf{u}}_0\vec{\mathbf{g}}_0 + x_1\vec{\mathbf{u}}_1\vec{\mathbf{g}}_0 = x_0 g_{00} + x_1 g_{01}$$

Και χρησιμοποιώντας τη γραφή $x_0=x[0]$, $g_{00}=g_0[0]$, $g_{01}=g_0[1]$ που χρησιμοποιείται στα σήματα διακριτού χρόνου προκύπτει:

$$c_0 = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]g_0[n]$$ και ομοίως: $$c_1 = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]g_1[n]$$

Για να υπολογίσουμε τα $x[0]$ και $x[1]$ από τα c_0 *και* c_1 αντικαθιστούμε

$\vec{\mathbf{x}} = c_0\vec{\mathbf{g}}_0 + c_1\vec{\mathbf{g}}_1$ στις σχέσεις $x_0 = \vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{u}}_0$ και $x_1 = \vec{\mathbf{x}}\cdot\vec{\mathbf{u}}_1$ και προκύπτει:

$$x_0 = (c_0\vec{\mathbf{g}}_0 + c_1\vec{\mathbf{g}}_1)\cdot\vec{\mathbf{u}}_0 = c_0\vec{\mathbf{g}}_0\vec{\mathbf{u}}_0 + c_1\vec{\mathbf{g}}_1\vec{\mathbf{u}}_0 = c_0 g_{00} + c_1 g_{10}$$

Οπότε ομοίως για τον τρόπο γραφής: $$x[0] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k g_k[0] \qquad x[1] = \sum_{k=0}^{N-1} c_k g_k[1]$$

Ερμηνεία με διανυσματική ανάλυση

Για παράδειγμα για N=3 τα ανύσματα

$$\mathbf{g}_0=[\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}}],\ \mathbf{g}_1=[\frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}],\ \mathbf{g}_2=[\frac{1}{\sqrt{6}} \quad -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \quad \frac{1}{\sqrt{6}}]$$

αποτελούν μία ορθοκανονική βάση και το σήμα **x=**[1, 3, 2] προβάλλεται σ'αυτά με προβολές που δίνουν οι συντελεστές $c_0 = 2\sqrt{3}$, $c_1 = -\sqrt{2}/2$, $c_2 = -\sqrt{6}/2$. Για n=0,1,2

Τα προηγούμενα ορθοκανονικά διανύσματα προήλθαν θέτοντας N=3 στις σχέσεις

- $g_0(n) = \frac{1}{\sqrt{N}},\ g_k(n) = \sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{\pi}{2N}k(2n+1))$ για k=1..N-1 και n=0,..,N-1
- $g_0(n) = \frac{1}{\sqrt{3}}\ \ g_1(n) = \sqrt{\frac{2}{3}}\cos(\frac{\pi}{6}(2n+1)),\ g_2(n) = \sqrt{\frac{2}{3}}\cos(\frac{\pi}{3}(2n+1))$

Διακριτός μετασχηματισμός συνημιτόνου
DCT – discrete cosine transform

Η σχέση $$g_0(n)=\frac{1}{\sqrt{N}},\ g_k(n)=\sqrt{\frac{2}{N}}\cos\left(\frac{\pi}{2N}k(2n+1)\right) \text{ για k=1..N-1 και n=0,..,N-1}$$

αποτελεί «πυρήνα» (kernel) δημιουργίας ορθοκανονικών διανυσμάτων για κάθε τιμή του N. Στην περίπτωση αυτή οι συντελεστές ck (δηλαδή οι προβολές του x στα gk) δίνονται (*):

$$c_0=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1}x[n],\ c_k=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{n=0}^{N-1}\cos\left(\frac{\pi}{2N}k\cdot(2n+1)\right)\cdot x[n] \text{ για k=1..N-1}$$

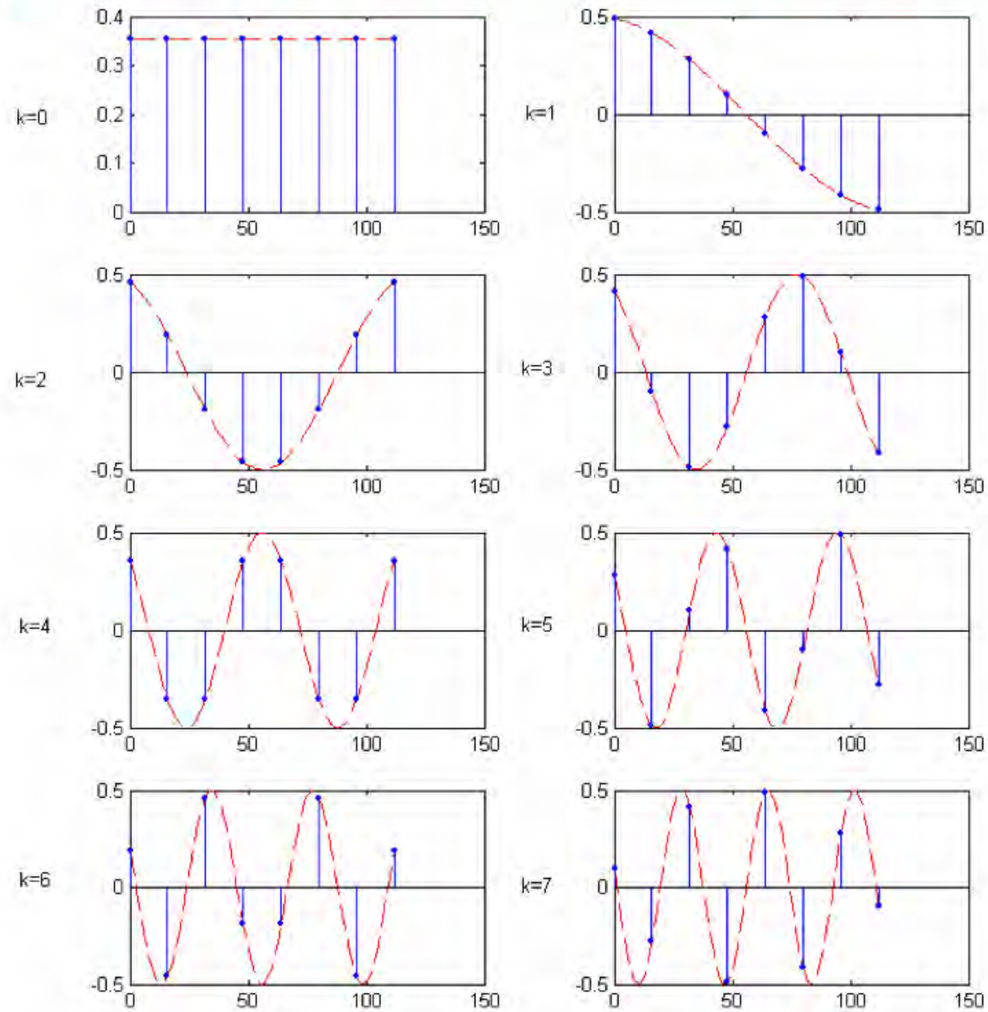
Η σχέση αυτή εκφράζει το μονοδιάστατο Διακριτό Μετασχηματισμό Συνημιτόνου (DCT)

Οι τιμές x[n] προκύπτουν έτσι: $$x[n]=\frac{c_0}{\sqrt{N}}+\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{k=1}^{N-1}c_k\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2N}k(2n+1)\right)$$

Η σχέση αυτή εκφράζει τον αντίστροφο μονοδιάστατο Διακριτό Μετασχηματισμό Συνημιτόνου (inverse DCT – iDCT)

Διακριτός μετασχηματισμός συνημιτόνου

Διανύσματα βάσης για N=8



Διακριτός μετασχηματισμός συνημιτόνου

Παράδειγμα

Για $\mathbf{x}=[1, 3, 2, -1]^T$ η τιμή N=4 και για n=0,1,2,3 τα ανύσματα βάσης είναι:

$$g_0[n]=\frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \mathbf{g}_0=[0.50,\ 0.50,\ 0.50,\ 0.50]^T$$

$$g_1[n]=\sqrt{\frac{2}{N}}\cos(\frac{\pi}{2N}(2n+1)) \quad \text{ή} \quad \mathbf{g}_1=[0.65,\ 0.27,\ -0.27,\ -0.65]^T$$

$$g_2(n)=\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2N}2\cdot(2n+1)) \quad \text{ή} \quad \mathbf{g}_2=[0.50,\ -0.50,\ 0.50,\ -0.50]^T$$

$$g_3(n)=\frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2N}3\cdot(2n+1)) \quad \text{ή} \quad \mathbf{g}_3=[0.27,\ -0.65.\ 0.65,\ -0.27]^T$$

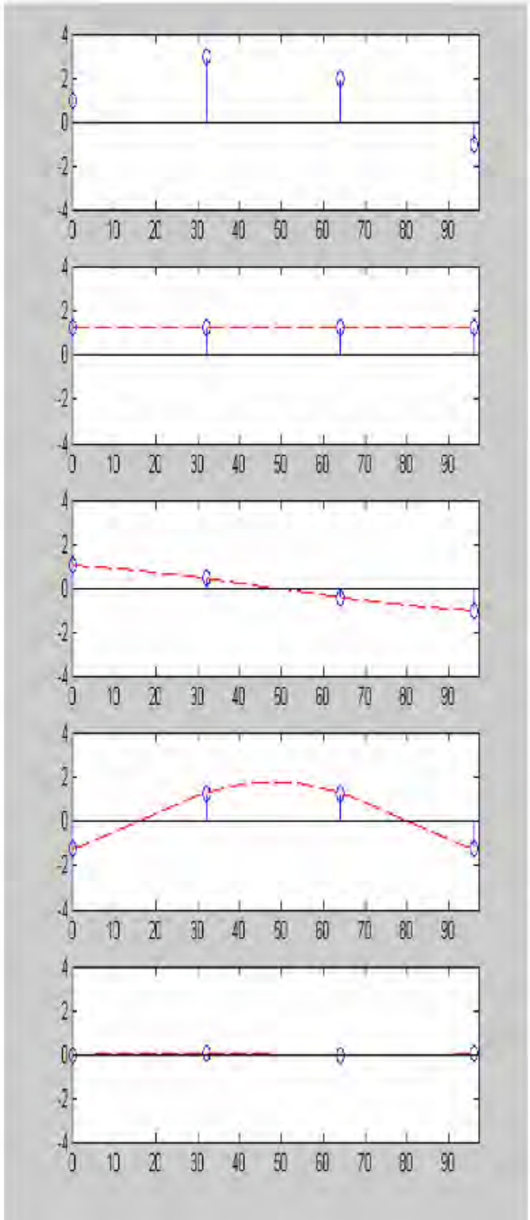
Οι συντελεστές c_k είναι τα στοιχεία του πίνακα

$$\mathbf{C}=\mathbf{G}^T\cdot\mathbf{x}=\begin{bmatrix}0.50 & 0.50 & 0.50 & 0.50\\ 0.65 & 0.27 & -0.27 & -0.65\\ 0.50 & -0.50 & 0.50 & -0.50\\ 0.27 & -0.65 & 0.65 & -0.27\end{bmatrix}\cdot\left\|\begin{matrix}1\\2\\3\\-1\end{matrix}\right\|=\begin{bmatrix}2.5\\1.58\\-2.5\\-0.11\end{bmatrix}$$

$x[n]=2.5g_0[n]+ 1.58g_1[n]-2.5g_2[n]-0.11g_3[n]$.

$$(*)\ c_i=\sum_{n=0}^{N-1}x[n]g_i[n]$$

$$\mathbf{x}=\mathbf{G}\cdot\mathbf{C}=\begin{bmatrix}0.50 & 0.65 & 0.50 & 0.27\\ 0.50 & 0.27 & -0.50 & -0.65\\ 0.50 & -0..27 & 0.50 & 0.65\\ 0.50 & -0.65 & -0.50 & -0.27\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2.5\\1.58\\-2.5\\-0.11\end{bmatrix}=\left\|\begin{matrix}1\\2\\3\\-1\end{matrix}\right\|$$



x=[1, 3, 2, −1]

$\mathbf{g}_1[n]$

$2{,}5 \cdot g_1[n]$

$\mathbf{g}_2[n]$

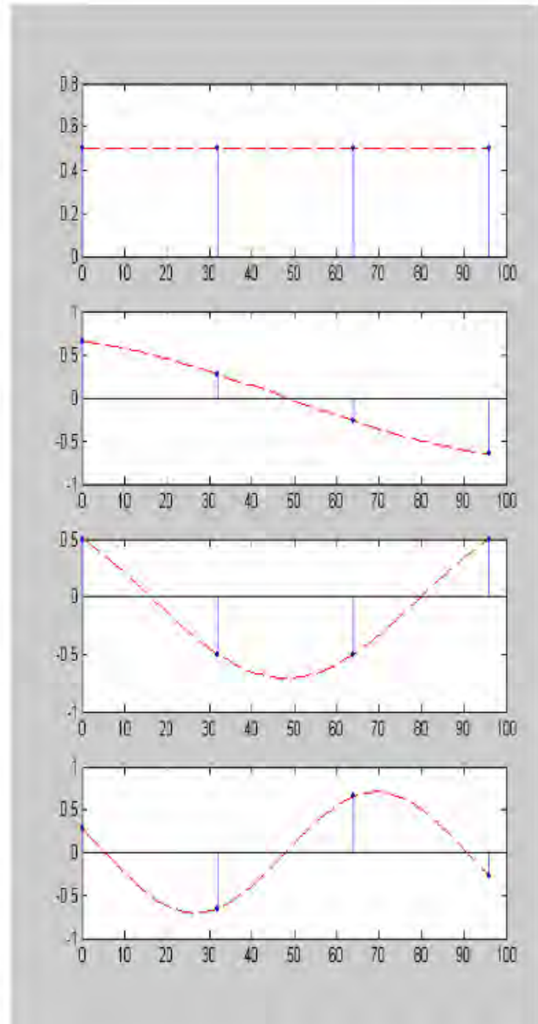
$1{,}58 \cdot g_2[n]$

$\mathbf{g}_2[n]$

$-2{,}5 \cdot g_2[n]$

$\mathbf{g}_3[n]$

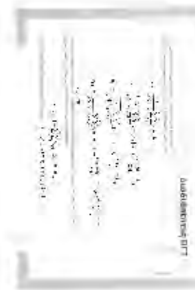
$-0{,}11 \cdot g_3[n]$



Δισδιάστατος DCT

Για διακριτά σήματα δύο διαστάσεων με μήκη N_1, N_2 τα ανύσματα βάσης για $n_1=0,..,N_1-1$, $n_2=0,..,N_2-1$, $k_1=0,..,N_1-1$, $k_2=0,..,N_2-1$ είναι:

$$g_{k_1 k_2}(n_1, n_2) = g_{k_1}(n_1) \cdot g_{k_2}(n_2)$$



π.χ.

$$g_{00}(n_1, n_2) = \frac{1}{\sqrt{N_1 N_2}},$$

$$g_{0k_2}(n_1, n_2) = \frac{1}{\sqrt{N_1}} \sqrt{\frac{2}{N_2}} \cdot \cos\left(\frac{\pi k_2 (2n_2 + 1)}{2N_2}\right),$$

$$g_{k_1 k_2}(n_1, n_2) = \sqrt{\frac{2}{N_1}} \cdot \cos\left(\frac{\pi k_1 (2n_1 + 1)}{2N_1}\right) \cdot \sqrt{\frac{2}{N_2}} \cdot \cos\left(\frac{\pi k_2 (2n_2 + 1)}{2N_2}\right)$$

Δισδιάστατος DCT

Για ένα δισδιάστατο σήμα διακριτού χρόνου x[n1,n2] με μήκη N1, N2 οι προβολές στα παραπάνω ορθοκανονικά διανύσματα βάσης είναι:

$$c_{00} = \frac{1}{\sqrt{N_1 N_2}} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x[n_1, n_2]$$

$$c_{0k_2} = \sqrt{\frac{2}{N_1 N_2}} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x[n_1, n_2] \cdot \cos\left(\frac{\pi k_2 (2n_2+1)}{2N_2}\right)$$

$$c_{k_1 0} = \sqrt{\frac{2}{N_1 N_2}} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x[n_1, n_2] \cdot \cos\left(\frac{\pi k_1 (2n_1+1)}{2N_1}\right)$$

$$c_{k_1 k_2} = \frac{2}{\sqrt{N_1 N_2}} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} x[n_1, n_2] \cdot \cos\left(\frac{\pi k_1 (2n_1+1)}{2N_1}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi k_2 (2n_2+1)}{2N_2}\right)$$

για $k_1, k_2 \neq 0$.

Οι εκφράσεις αυτές αποτελούν το Δισδιάστατο Διακριτό Μετασχηματισμό Συνημιτόνου και η ανάκτηση του αρχικού σήματος γίνεται με τον αντίστροφο μετασχηματισμό:

$$x[n_1, n_2] = \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} c_{k_1 k_2} \cdot g_{k_1 k_2}[n_1, n_2]$$

* Διαχωρισιμότητα μετασχηματισμού εξαιτίας: $g_{k_1 k_2}(n_1, n_2) = g_{k_1}(n_1) \cdot g_{k_2}(n_2)$

Δισδιάστατος DCT

Βάση για 8x8