Εξισώσεις διαφορών

Difference equations

Γραμμικές εξισώσεις διαφορών με σταθερούς συντελεστές

Εξισώσεις διαφορών

- Το άθροισμα της συνέλιξης
  - εκφράζει την έξοδο ενός LSI συστήματος
  - συναρτήσει ενός γραμμικού συνδυασμού των τιμών της εισόδου
- Σύστημα με κρουστική απόκριση

$$h[n] = a^n u[n]$$

Περιγράφεται από την εξίσωση

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(n-k)$$

Εξισώσεις διαφορών

- Η εξίσωση
  - Μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την έξοδο για τυχαία ακολουθία εισόδου
  - Δεν είναι αποτελεσματική από πλευράς υπολογισμών
  - Πολλές φορές είναι δυνατό να εκφράσουμε έξοδο σε συνάρτηση με παρελθούσες τιμές της εισόδου και της εξόδου

$$y[n] = ay[n-1] + x[n]$$

  - Η εξίσωση αποτελεί ειδική περίπτωση
    - Γραμμικές Εξισώσεις Διαφορών με Σταθερούς Συντελεστές

Γραμμικές ΕΔ με ΣΣ

- Η γενική μορφή μιας ΓΕΔΣΣ είναι η εξής:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{q} b[k]x[n-k] - \sum_{k=0}^{p} a[k]y[n-k]$$

  - όπου a[k], b[k] σταθερές που καθορίζουν το σύστημα
    - Αν η εξίσωση περιέχει τουλάχιστον ένα μη-μηδενικό όρο a[k] καλείται αναδρομική (recursive), ειδάλλως μη-αναδρομική

Εξισώσεις διαφορών στα συστήματα

- Οι ΕΔ παρέχουν δυνατότητα υπολογισμού της απόκρισης συστήματος σε τυχαία είσοδο
- Είναι απαραίτητος ο ορισμός αρχικών συνθηκών
  - Όταν είναι μηδενικές το σύστημα χαρακτηρίζεται ως σύστημα σε αρχική ηρεμία (initial rest)

Εξισώσεις διαφορών στα συστήματα

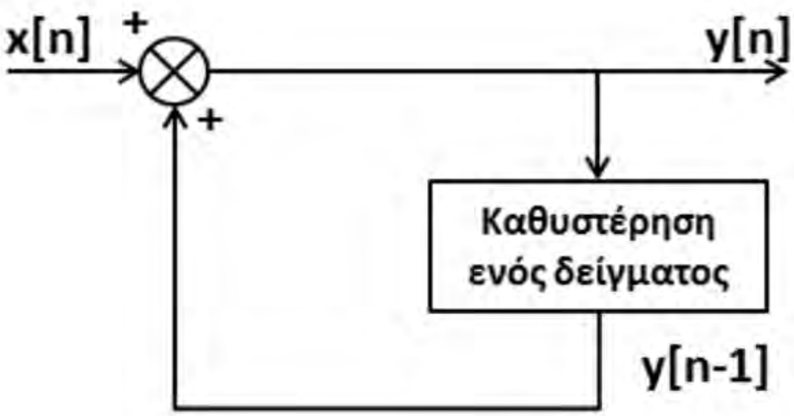
- Για LSI σύστημα που περιγράφεται από εξίσωση διαφορών
  - Η κρουστική απόκριση υπολογίζεται
    - λύνοντας την ΕΔ για x[n]=δ[n] με μηδενικές αρχικές συνθήκες
- Για μη-αναδρομικό σύστημα είναι:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{q} b(k)x(n-k)$$

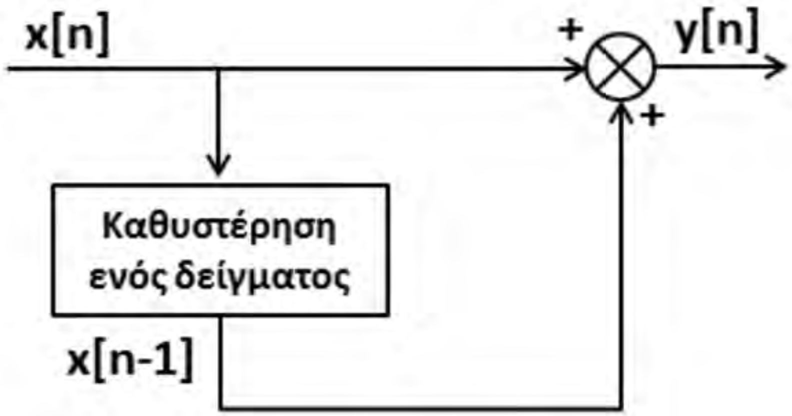
  - Η κρουστική απόκριση είναι απλά:

$$h[n] = \sum_{k=0}^{q} b(k)\delta(n-k)$$

Εξισώσεις διαφορών στα συστήματα



Σχηματικό διάγραμμα ενός αναδρομικού συστήματος συσσωρευτή (accumulator)



Σχηματικό διάγραμμα ενός μη-αναδρομικού συστήματος συσσωρευτή (accumulator)

Επίλυση Γραμμικών ΕΔ με ΣΣ

- Διάφορες μέθοδοι επίλυσης
  - Σχηματισμός πίνακα τιμών εισόδου/εξόδου και υπολογισμούς λύσης για κάθε τιμή του n
  - Χρήση του μετασχηματισμού z
  - Εύρεση ομογενών και μερικών λύσεων

Επίλυση Γραμμικών ΕΔ με ΣΣ

- Δεδομένης ΓΕΔΣΣ, η γενική λύση είναι το άθροισμα δύο όρων, της ομογενούς και της μερικής λύσης:

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n]$$

  – η ομογενής λύση αντιστοιχεί στην απόκριση του συστήματος στις αρχικές συνθήκες όταν x[n]=0
  – Η μερική λύση αντιστοιχεί στην απόκριση του συστήματος στην είσοδο x[n] όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές

Επίλυση Γραμμικών ΕΔ με ΣΣ

- Η ομογενής λύσης βρίσκεται από την επίλυση:

$$y[n] + \sum_{k=0}^{p} a[k]y[n-k] = 0$$

  - η λύση βρίσκεται υποθέτοντας μια λύση της μορφής

$$y_h[n] = \lambda^n$$

  - αντικαθιστώντας:

$$\lambda^n + \sum_{k=0}^{p} a[k]\lambda^{n-k} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda^{n-p}\{\lambda^p + a[1]\lambda^{p-1} + a[2]\lambda^{p-2} + \dots + a[p-1]\lambda + a[p]\} = 0$$

Επίλυση Γραμμικών ΕΔ με ΣΣ

$$\lambda^{n-p}\{\lambda^p + a[1]\lambda^{p-1} + a[2]\lambda^{p-2} + \cdots + a[p-1]\lambda + a[p]\} = 0$$

- Το πολυώνυμο στις {} καλείται χαρακτηριστικό πολυώνυμο p-βαθμού και έχει
  - p ρίζες, είτε πραγματικές είτε φανταστικές
  - αν a[k] πραγματικές τιμές
    - οι ρίζες συζυγή μιγαδικά ζεύγη
- Αν οι p ρίζες είναι διαφορετικές, γενική λύση:

$$y_h[n] = \sum_{k=0}^{p} A_k {\lambda^n}_k, \qquad \text{όπου A σταθερές για να ισχύουν οι αρχικές συνθήκες}$$

Επίλυση Γραμμικών ΕΔ με ΣΣ

- Η μερική λύση για να βρεθεί
  - απαιτεί να βρεθεί ακολουθία που να ικανοποιεί την ΕΔ για τη δεδομένη είσοδο
    - απαιτεί εμπειρία
    - για αρκετές τυπικές εισόδους η λύση ίδιας μορφής με την είσοδο

Term in $x(n)$	Particular Solution
C	C_1
Cn	$C_1 n + C_2$
Ca^n	$C_1 a^n$
$C\cos(n\omega_0)$	$C_1\cos(n\omega_0) + C_2\sin(n\omega_0)$
$C\sin(n\omega_0)$	$C_1\cos(n\omega_0) + C_2\sin(n\omega_0)$
$Ca^n\cos(n\omega_0)$	$C_1 a^n\cos(n\omega_0) + C_2 a^n\sin(n\omega_0)$
$C\delta(n)$	None

πίνακας μερικών λύσεων για διαφορετικές μορφές εισόδου

Επίλυση Γραμμικών ΕΔ με ΣΣ

- Αν η είσοδος είναι $x[n] = a^n u[n]$
  - Η μερική λύση είναι της μορφής: $y_p[n] = Ca^n u[n]$
    - με προϋπόθεση ότι το a δε θα είναι ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης

πίνακας μερικών λύσεων για διαφορετικές μορφές εισόδου

Term in $x(n)$	Particular Solution
C	C_1
Cn	$C_1 n + C_2$
Ca^n	$C_1 a^n$
$C\cos(n\omega_0)$	$C_1\cos(n\omega_0) + C_2\sin(n\omega_0)$
$C\sin(n\omega_0)$	$C_1\cos(n\omega_0) + C_2\sin(n\omega_0)$
$Ca^n\cos(n\omega_0)$	$C_1 a^n\cos(n\omega_0) + C_2 a^n\sin(n\omega_0)$
$C\delta(n)$	None

Επίλυση ΓΕΔΣΣ 1ης τάξης

- Έστω η ΕΔ $y[n] + ay[n-1] = b$
- Για τη λύση της ομογενούς εξίσωσης θέτουμε b=0 $y[n] + ay[n-1] = 0$
- Θέτουμε επίσης $y_h[n] = \lambda^n$
- Και συνεπώς προκύπτει η εξίσωση

$$\lambda^n + \sum_{k=0}^{p} a[k]\lambda^{n-k} = 0 \Rightarrow \lambda^{n-1}\{\lambda + \alpha\} = 0$$

- Άρα χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\lambda + a = 0 \Rightarrow \lambda = -a$
- Λύση ομογενούς: $y_h[n] = C\lambda^n$ όπου C σταθερά
- Για την εύρεση της μερικής λύσης θέτουμε $y_p[n] = A$
- Συνεπώς μερική λύση: $y_p[n] = A$
- Τελικά, συνολική λύση: $y[n] = y_h[n] + y_p[n]$

Επίλυση ΓΕΔΣΣ 1ης τάξης

- Να βρεθεί η λύση της ΕΔ $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = 0$
  - χωρίς αρχική τιμή
  - με αρχική τιμή y[0]=1
- Λύση
  - είναι ομογενής με χαρ. πολ. $\lambda - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$
  - άρα $y_h[n] = C\lambda^n = C\left(\frac{1}{2}\right)^n$
  - όταν y[0]=1 $y[0] = C\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1 \Rightarrow C = 1$
  - και συνεπώς:

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Επίλυση ΓΕΔΣΣ 1ης τάξης

- Να βρεθεί η λύση της ΕΔ $y[n] - \frac{1}{2}y[n-1] = 3$
- Θέτουμε ΕΔ=0 για εύρεση της ομογενούς λύσης

$$\lambda - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \qquad y_h[n] = C\lambda^n = C\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- Θέτουμε y[n]=A (αφού β=3 σταθερός) για εύρεση της μερικής λύσης $(y_p[n] = A)$

$$y_p[n] - \frac{1}{2}y_p[n-1] = 3 \Rightarrow A - \frac{1}{2}A = 3 \Rightarrow A = 6, \qquad \text{συνεπώς } y_p[n] = 6$$

- Ολική λύση της εξίσωσης:

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] = \mathrm{C}\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$$

Επίλυση ΓΕΔΣΣ 1ης τάξης

- Να βρεθεί η λύση της ΕΔ $y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=2n$
- Θέτουμε ΕΔ=0 για εύρεση της ομογενούς λύσης

$$\lambda-\frac{1}{2}=0\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2} \qquad y_h[n]=C\lambda^n=C\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- Θέτουμε y[n]=An+B (αφού β=2n) για εύρεση της μερικής λύσης $(y_p[n]=An+B)$

$$y_p[n]-\frac{1}{2}y_p[n-1]=2n\Rightarrow(An+B)-\frac{1}{2}\{A(n-1)+B\}=2n\Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}An+\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B=2n\Rightarrow n(A-4)+(A+B)=0\Rightarrow A=4,B=-4\ \Rightarrow y_p[n]=4n-4$$

- Ολική λύση της εξίσωσης:

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=\mathrm{C}\left(\frac{1}{2}\right)^n+4n-4$$

Επίλυση ΓΕΔΣΣ 1ης τάξης

- Να βρεθεί η λύση της ΕΔ $y[n]-\frac{1}{2}y[n-1]=2^n, \qquad n\geq 0$
- Θέτουμε ΕΔ=0 για εύρεση της ομογενούς λύσης

$$\lambda-\frac{1}{2}=0\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2} \qquad\qquad y_h[n]=C\lambda^n=C\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

- Θέτουμε για εύρεση της μερικής λύσης

$$y_p[n]=A2^n u[n]$$

$$y_p[n]-\frac{1}{2}y_p[n-1]=2^n\Rightarrow A2^n u[n]-\frac{1}{2}A2^{n-1}u[n-1]=2^n\Rightarrow$$

$$Au[n]-\frac{1}{4}Au[n-1]=1\Rightarrow A\left(u[n]-\frac{1}{4}u[n-1]\right)=1\overset{n\geq1}{\Longrightarrow}A=\frac{4}{3}\Rightarrow y_p[n]=\frac{4}{3}2^n$$

- Ολική λύση της εξίσωσης:

$$y[n]=y_h[n]+y_p[n]=\mathrm{C}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{4}{3}2^n$$

Επίλυση ΓΕΔΣΣ 2ης τάξης

- Έστω η ΕΔ $y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b$
- Για τη λύση της ομογενούς εξίσωσης θέτουμε b=0
- Χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$
  - Δ>0➔2 λύσεις $y_h[n] = C_1{\lambda_1}^n + C_2{\lambda_2}^n$
  - Δ=0➔1 διπλή λύση $y_h[n] = C_1{\lambda_1}^n + C_2{\lambda_1}^n = (C_1 + C_2)\,{\lambda_1}^n$
  - Δ<0➔2 μιγαδικές λύσεις $y_h[n] = C_1{\lambda_1}^n + C_2{\lambda_2}^n = r^n\{C_1\cos(\theta n) + C_2\sin(\theta n)\}$

- Για την εύρεση της μερικής λύσης θέτουμε $y_p[n] = A$
- Συνεπώς μερική λύση: $y_p[n] = A$
- Τελικά, συνολική λύση: $y[n] = y_h[n] + y_p[n]$

Επίλυση ΓΕΔΣΣ 2ης τάξης

- Να βρεθεί η λύση της ΕΔ $y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = 0$
  - χωρίς αρχική τιμή
  - με αρχική τιμή y[-1]=1, y[0]=1
- Λύση
  - είναι ομογενής με χαρ. πολ. $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$
  - άρα $y_h[n] = C_1 {\lambda_1}^n + C_2 {\lambda_2}^n = C_1 2^n + C_2 3^n$
  - όταν $y[0] = 1 \Rightarrow C_1 2^0 + C_2 3^0 = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = 1$
  - όταν $y[-1] = 1 \Rightarrow C_1 2^{-1} + C_2 3^{-1} = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{3} C_2 = 1$

$$\left.\begin{aligned} &C_1 + C_2 = 1 \\ &\frac{1}{2} C_1 + \frac{1}{3} C_2 = 1 \end{aligned}\right\} C_1 = 4, C_2 = -4$$

  - και συνεπώς: $y[n] = 4 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n$

Επίλυση ΓΕΔΣΣ 2ης τάξης

$$y[n] - 5y[n-1] + 6y[n-2] = u[n] + u[n-1]$$

- Να βρεθεί η λύση της ΕΔ
- Θέτουμε ΕΔ=0 για εύρεση της ομογενούς λύσης $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$

$$y_h[n] = C_1{\lambda_1}^n + C_2{\lambda_2}^n = C_1 2^n + C_2 3^n$$

- Θέτουμε για εύρεση της μερικής λύσης

$$y_p[n] = A(u[n] + u[n-1])$$

$$A(u[n] + u[n-1]) - 5\{A(u[n-1] + u[n-2])\} +$$

$$+6\{(u[n-2] + u[n-3])\} = u[n] + u[n-1] \overset{n\geq 3}{\Longrightarrow} 2A - 10A + 12 = 2 \Rightarrow A = \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$y_p[n] = \frac{5}{4}\{u[n] - u[n-1]\}$$

- Ολική λύση της εξίσωσης:

$$y[n] = C_1 2^n + C_2 3^n + \frac{5}{4}\{u[n] - u[n-1]\}$$

Επίλυση ΓΕΔΣΣ 2ης τάξης

- Να βρεθεί η λύση της ΕΔ $y[n] - 0{,}25y[n-2] = u[n]$
- Θέτουμε ΕΔ=0 για εύρεση της ομογενούς λύσης

$$\lambda^2 - 0{,}25 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0{,}5 \qquad \lambda_2 = -0{,}5$$

$$y_h[n] = C_1{\lambda_1}^n + C_2{\lambda_2}^n = C_1 0{,}5^n + C_2(-0{,}5)^n$$

- Θέτουμε για εύρεση της μερικής λύσης $y_p[n] = A$

$$A - 0{,}25A = 1 \Rightarrow A = \frac{4}{3} \Rightarrow y_p[n] = \frac{4}{3}$$

- Ολική λύση της εξίσωσης: $y[n] = C_1 0{,}5^n + C_2(-0{,}5)^n + \frac{4}{3}$
- για y[0]=y[1]=1

$$\left.\begin{aligned} y[0] = 1 \Rightarrow C_1 0{,}5^0 + C_2(-0{,}5)^0 + \frac{4}{3} = 1 \Rightarrow C_1 + C_2 = -\frac{1}{3} \\ y[1] = 1 \Rightarrow C_1 0{,}5^1 + C_2(-0{,}5)^1 + \frac{4}{3} = 1 \Rightarrow C_1 - C_2 = -\frac{2}{3} \end{aligned}\right\} C_1 = -\frac{1}{2}, C_2 = -\frac{1}{6}$$