Κρουστική απόκριση

Συνελικτικό άθροισμα

Συνέλιξη διακριτών σημάτων

Απόκριση σήματος σε κρουστική διέγερση

Όταν είσοδος ενός συστήματος είναι η κρουστική ακολουθίας δ[n], η έξοδος καλείται απόκριση σε κρουστική διέγερση ή κρουστική απόκριση h[n]

$$h[n] = T\{\delta[n]\}$$

Κρουστική απόκριση

Έστω σύστημα Τ, το οποίο είναι γραμμικό ανεξάρτητο κατά την μετατόπιση (LSI)

Αφού για κάθε διακριτό σήμα ισχύει: $\mathbf{x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)}$

$$y(n) = T[x(n)] = T[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)]$$

Γραμμικό => επαλληλία και ομογένεια:

$$y(n) = T[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} T[x(k) \cdot \delta(n-k)]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot T[\delta(n-k)] \Rightarrow$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h_k(n)$$

Αμετάβλητο στην ολίσθηση: $h_k(n) = h(n-k)$

Άρα τελικά: $y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot h(n-k)$ συνελικτικό άθροισμα

Συνελικτικό άθροισμα

Γενικά, για δύο ακολουθίες x[n], και y[n] το συνελικτικό άθροισμα τους συμβολίζεται x[n]*y[n] ή {x*y}[n] και δίνεται:

$$x(n) * y(n) = \{x * y\}(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot y(n-k)$$

- Συχνά χρησιμοποιείται η ονομασία συνέλιξη των διακριτών σημάτων εννοώντας το συνελικτικό άθροισμα

Αν γνωρίζουμε την απόκριση σε κρουστική διέγερση ενός συστήματος LSI, μπορούμε να υπολογίσουμε την έξοδό του σε οποιαδήποτε είσοδο από τη σχέση y[n]=x[n]* h[n]

Κρουστική απόκριση

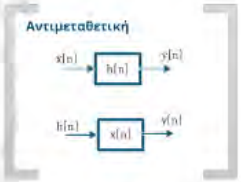
- Η απόκριση σε κρουστική διέγερση ενός συστήματος LSI το προσδιορίζει πλήρως
- Από την απόκριση σε κρουστική διέγερση ενός LSI συστήματος ελέγχεται η αιτιότητα και η ευστάθειά του
  - αφού σε ένα αιτιατό σύστημα η έξοδος δεν εξαρτάται από τιμές της εισόδου που ακολουθούν την τιμή x[n] τότε η απόκρισή του σε κρουστική διέγερση είναι ένα σήμα δεξιάς πλευράς διότι δεν εξαρτάται από τιμές δ[n+n0], n0>0.
- Ένα σύστημα LSI με απόκριση σε κρουστική διέγερση h(n) είναι ευσταθές BIBO αν ισχύει η συνθήκη

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| \in R$$

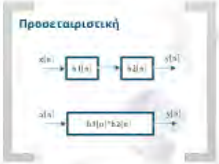
Ιδιότητες της συνέλιξης διακριτών σημάτων

Η συνέλιξη δύο ακολουθιών είναι μια πράξη (τελεστής) μεταξύ δυο ακολουθιών

Είναι γραμμικός τελεστής και έχει τις ιδιότητες:



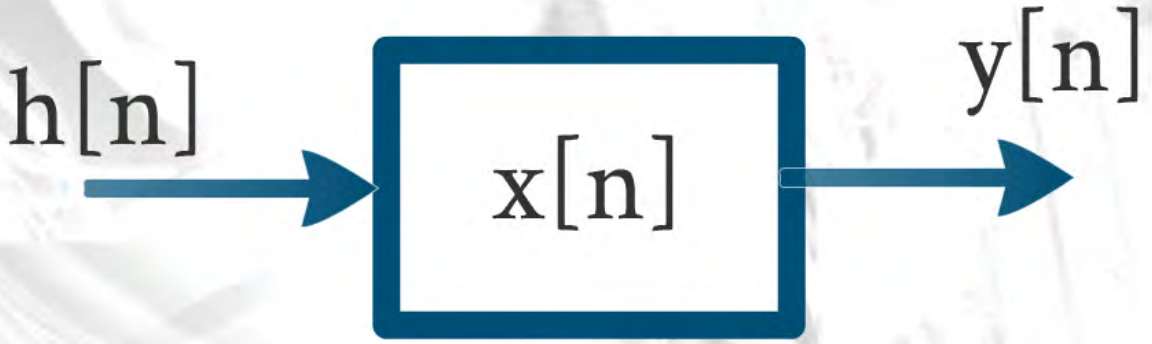
- Αντιμεταθετική: x[n]*y[n] = y[n]*x[n]
- Προσεταιριστική:
  (x[n]*y[n])*z[n]=x[n]*(y[n]*z[n])



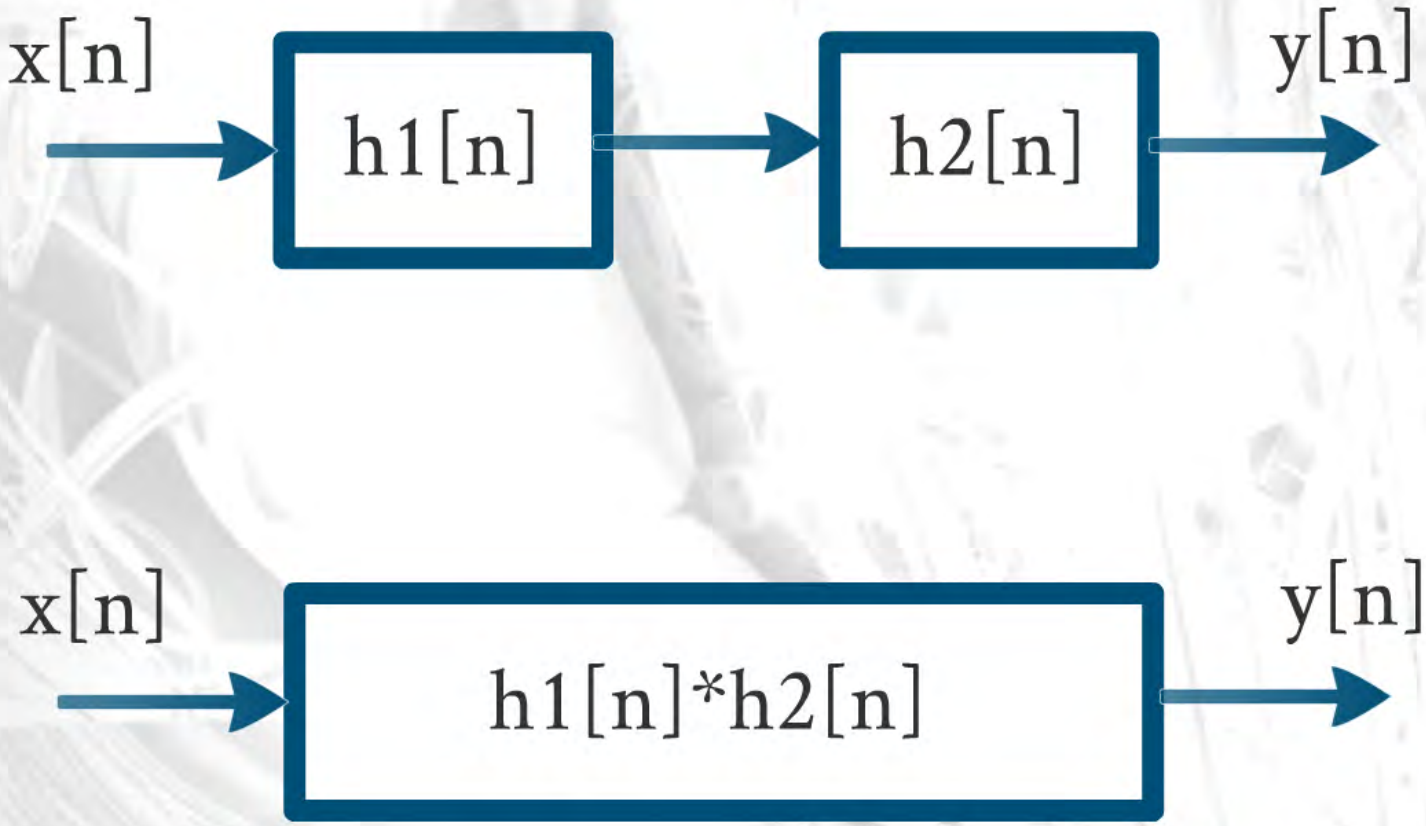
  - για LSI σε σειρά σημαίνει h[n]=h1[n]*h2[n]
- Επιμεριστική ως προς την πρόσθεση:
  x[n]*(y[n]+z[n])=x[n]*y[n]+x[n]*z[n]

  - για LSI παράλληλα h[n]=h1[n]+h2[n]

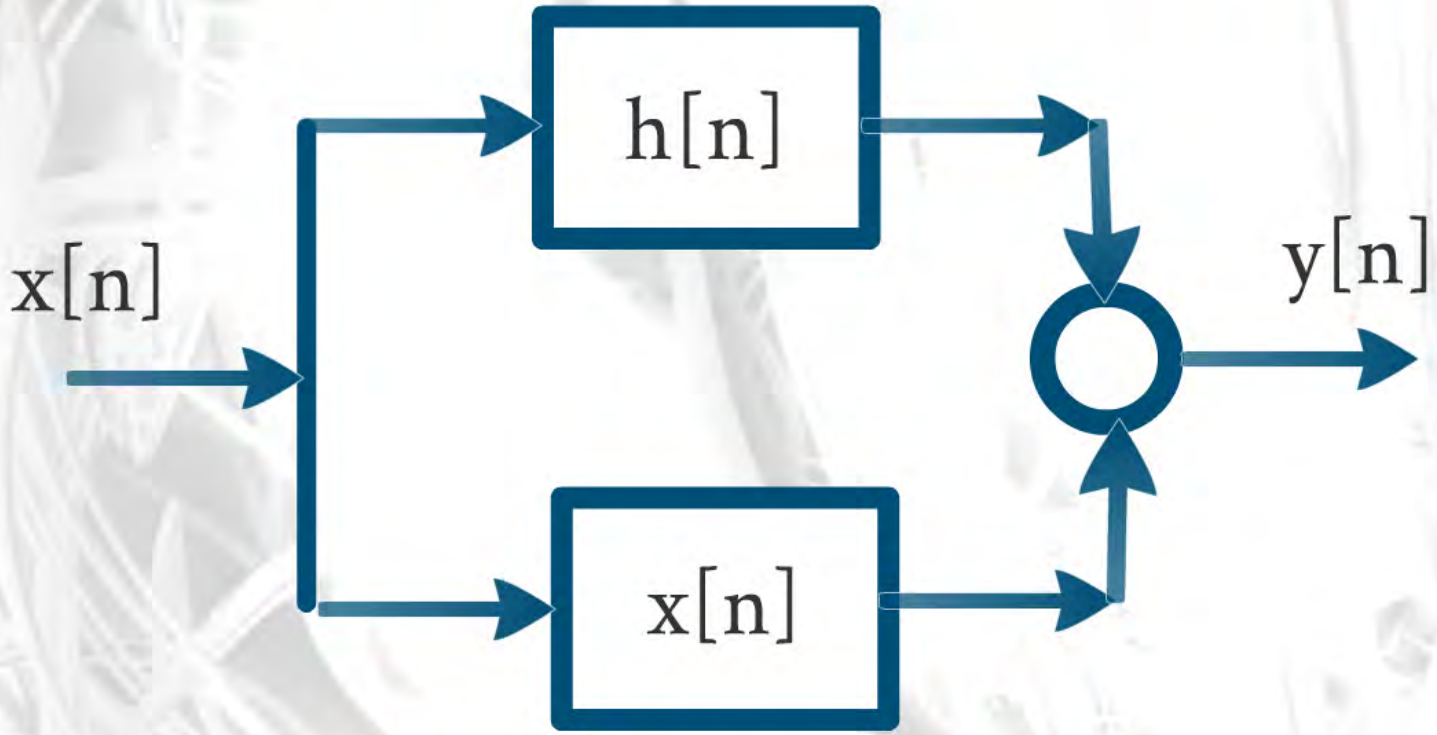
Αντιμεταθετική

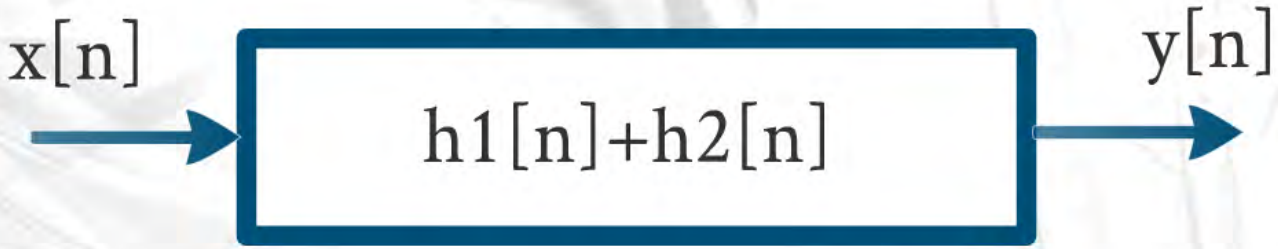


Προσεταιριστική



Επιμεριστική (στην πρόσθεση)





Υπολογισμός συνέλιξης - αλγεβρικά

Να υπολογισθεί η συνέλιξη u[n]*u[n-n0]

$$u(n)*u(n-n_0)=u(n-n_0)*u(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}u(k-n_0)\cdot u(n-k)\Rightarrow$$

$$u(n)*u(n-n_0)=\sum_{k=n_0}^{n}1=n-n_0+1$$

Να υπολογιστεί η συνέλιξη $[a^n u(n)]*u(n),\ a\neq 1$

$$[a^n u(n)]*u(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a^k u(k)\cdot u(n-k)=\sum_{k=0}^{n}a^k=$$

$$a^0+a^1+a^2+....+a^n=1+a+a^2+....+a^n=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$

Εκφράσεις για τις συχνά χρησιμοποιούμενες σειρές

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \qquad |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} na^n = \frac{(N-1)a^{N+1} - Na^N + a}{(1-a)^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} na^n = \frac{a}{(1-a)^2} \qquad |a| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{1}{2}N(N-1)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{1}{6}N(N-1)(2N-1)$$

Συνέλιξη - περίπτωση πεπερασμένου μήκους

Αν x[n] και y[n] σήματα με πεπερασμένα μήκη Nx και Ny, στα διαστήματα [Lx, Rx] και [Ly, Ry] αντίστοιχα η συνέλιξη τους θα είναι

$$x(n) * y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot y(n-k) \text{ με } \quad L_x \le k \le R_x$$

$$L_y \le n-k \le R_y \Rightarrow \quad R_y + n \le k \le L_y + n$$

Συνεπάγεται ότι: $L_x + L_y \le n \le R_x + R_y$

και: $\max(L_x, n - R_y) \le k \le \min(R_x, n - L_y)$

Άρα:

$$x(n) * y(n) = \sum_{k=\max(Lx.n-Ry)}^{\min(Rx,n-Ly)} x(k) \cdot y(n-k)$$

Συνέλιξη - παράδειγμα πεπερασμένου μήκους

x=[2 1 3 4], y=[1 2 -1] με Lx=Ly=0, N=Nx+Ny-1=6, διάστημα [Lx+Ly,Rx+Ry]=[0,5], Lx+Ly≤n≤Rx+Ry => 0≤n≤5

	k	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5		
	$x(k)$	0	0	0	0	2	1	3	4	0	0		
N	$y(n-k)$												$\{x*y\}(n)$
-1	$y(-1-k)$	0	-1	2	1	0	0	0	0	0	0	0·0	0
0	$y(-k)$	0	0	-1	2	1	0	0	0	0	0	2·1	2
1	$y(1-k)$	0	0	0	-1	2	1	0	0	0	0	2·2+1·1	5
2	$y(2-k)$	0	0	0	0	-1	2	1	0	0	0	2·(-1)+2·1+3·1	3
3	$y(3-k)$	0	0	0	0	0	-1	2	1	0	0	1·(-1)+3·2+4·1	9
4	$y(4-k)$	0	0	0	0	0	0	-1	2	1	0	3·(-1)+4·2	5
5	$y(5-k)$	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	1	4·(-1)	-4
6	$y(6-k)$	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	2	0·0	0
7	$y(7-k)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0·0	0

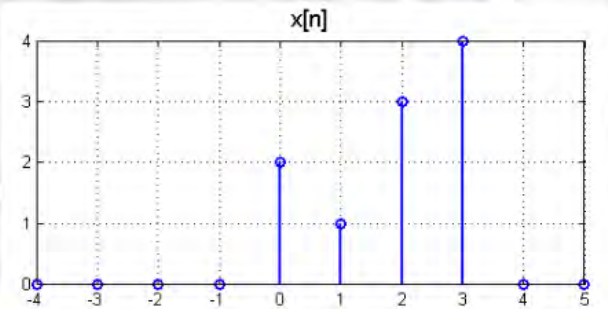
y \ x	2	1	3	4
1	2	1	3	4
2	4	2	6	8
-1	-2	-1	-3	-4

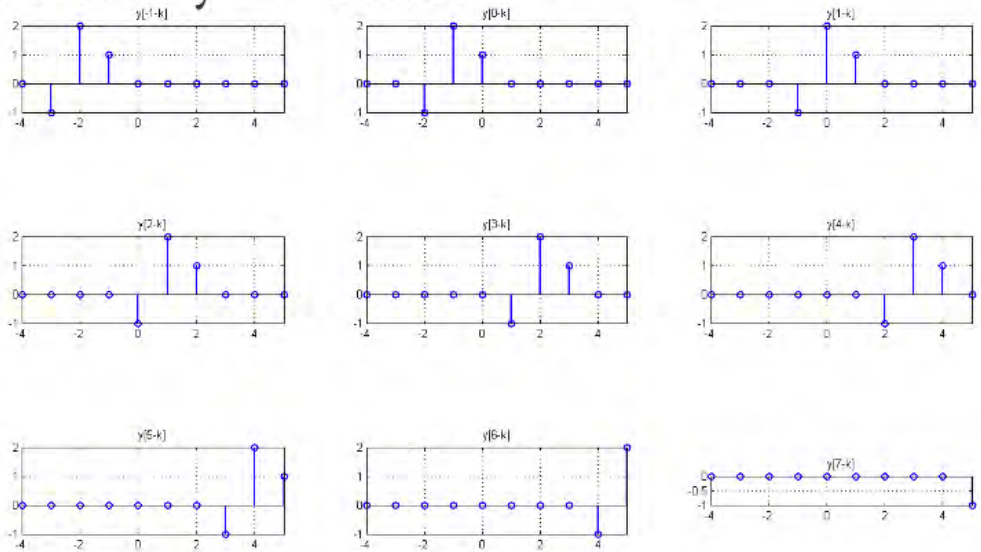
2 5 3 9 5 -4

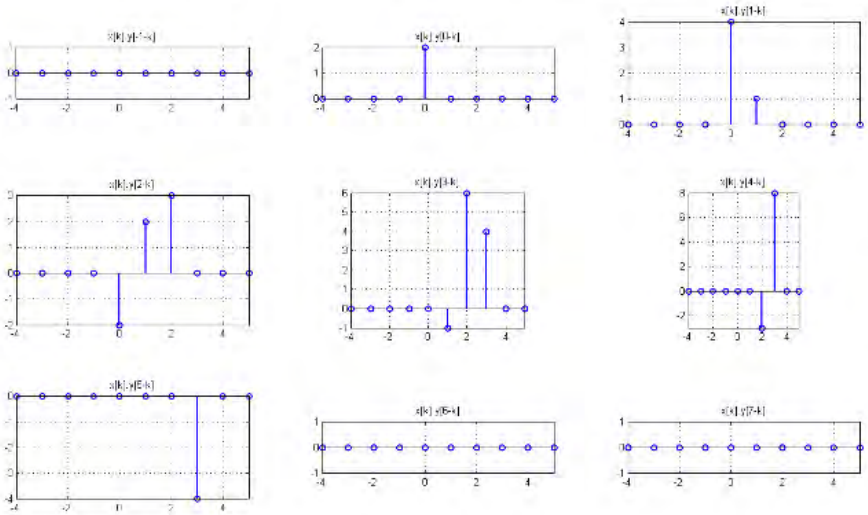
Συνέλιξη - παράδειγμα πεπερασμένου μήκους

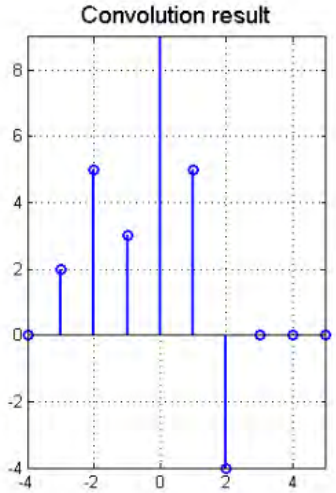
Γραφική προσέγγιση

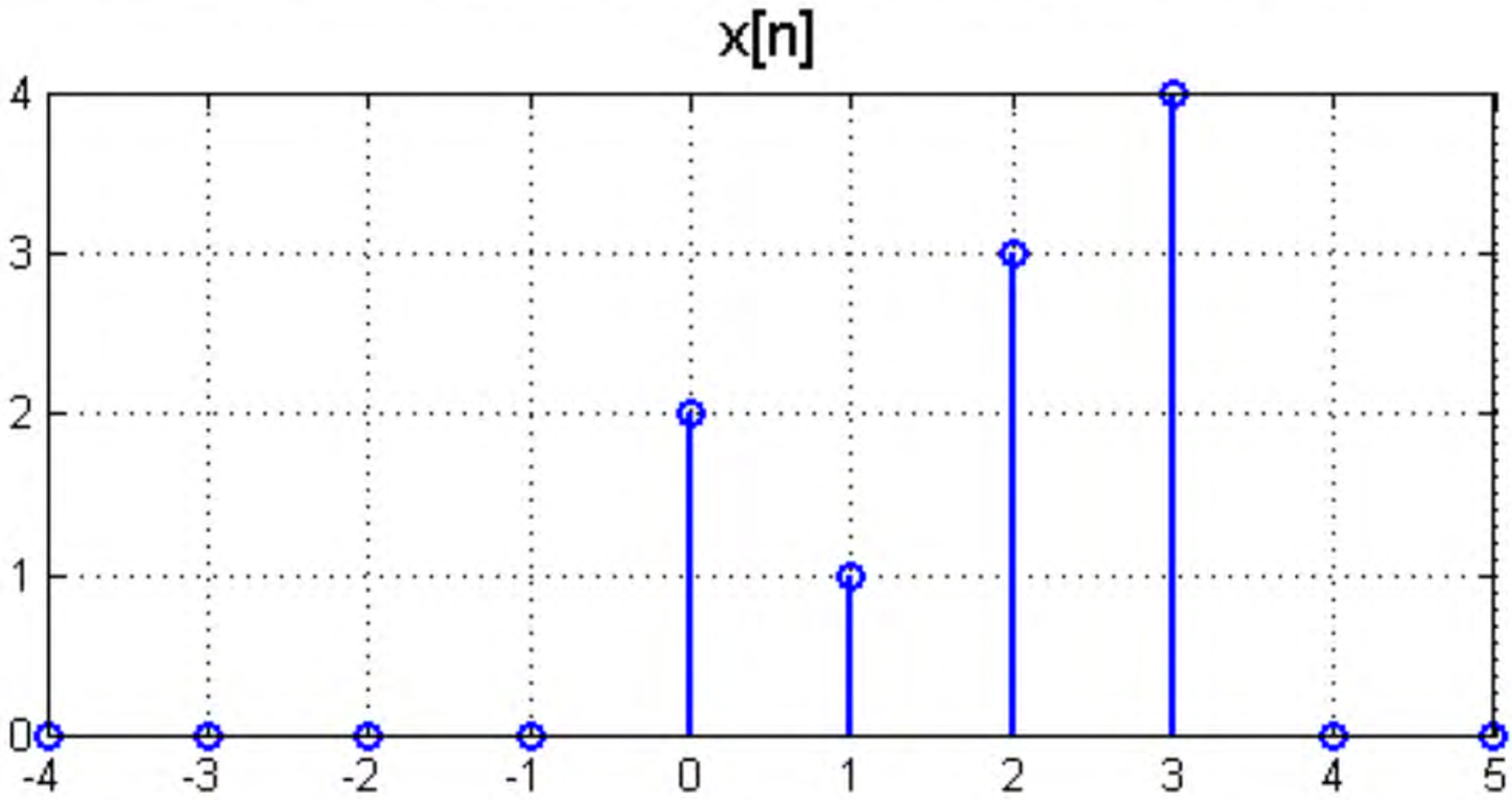
x=[2 1 3 4], y=[1 2 -1] με Lx=Ly=0, N=Nx+Ny-1=6, διάστημα [Lx+Ly,Rx+Ry]=[0,5], Lx+Ly≤n≤Rx+Ry => 0≤n≤5



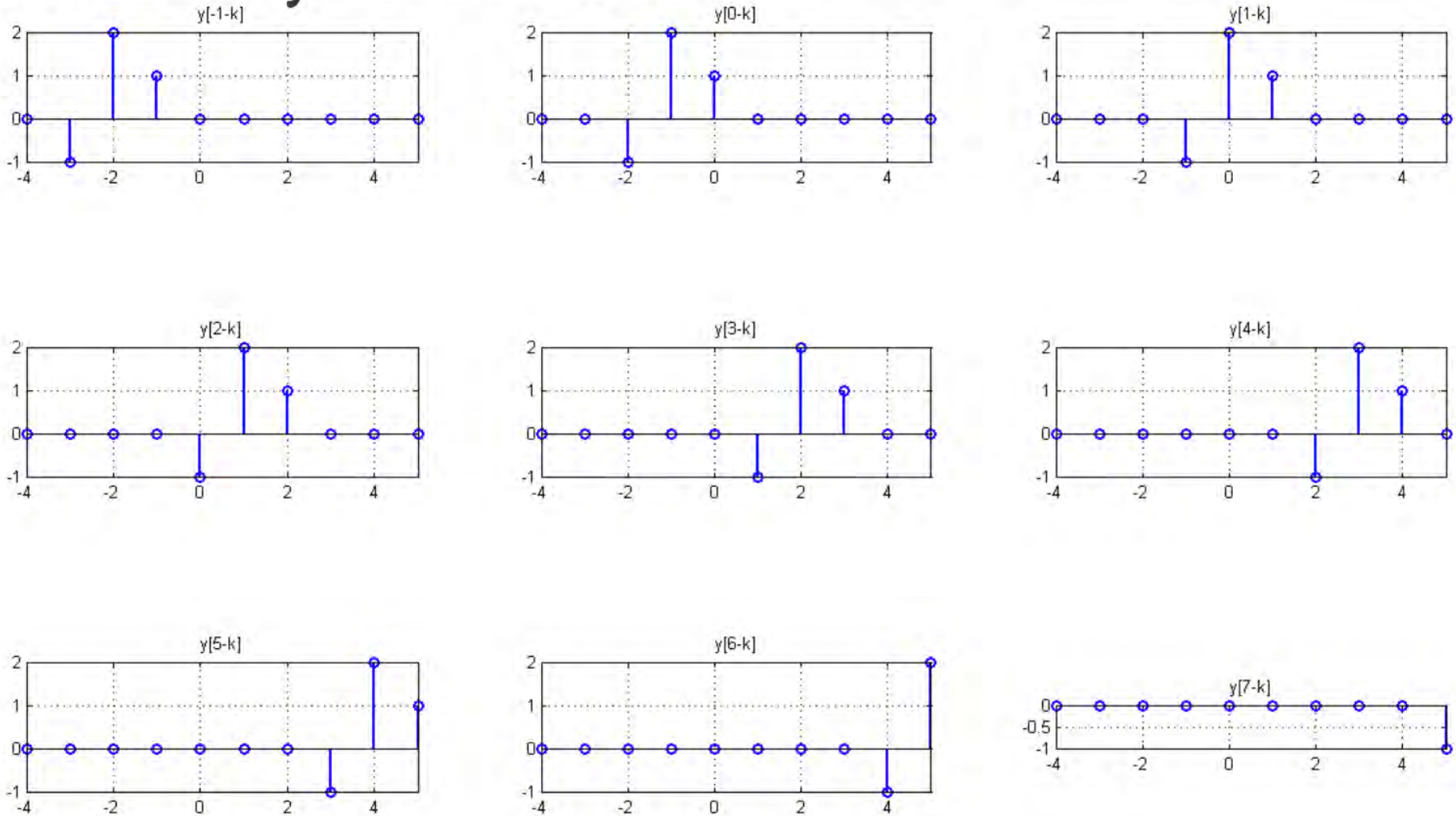


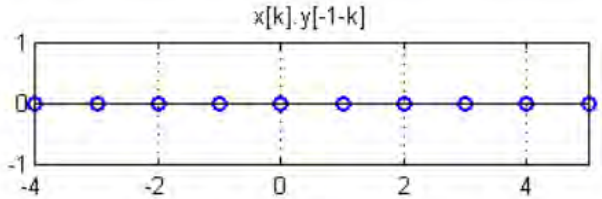


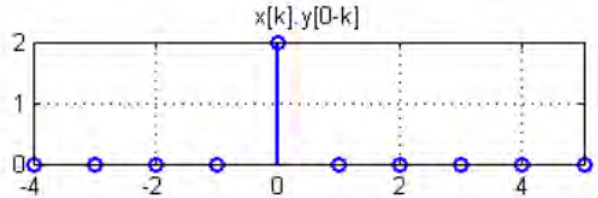


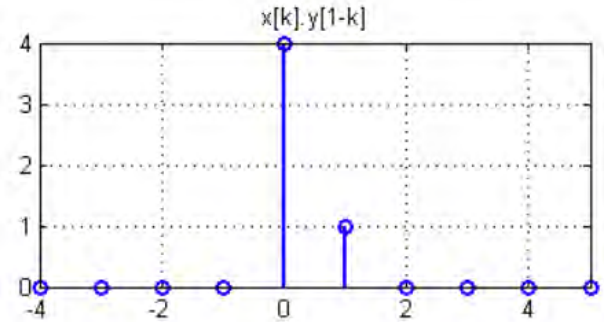

x[n]
4
3
2
1
0
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

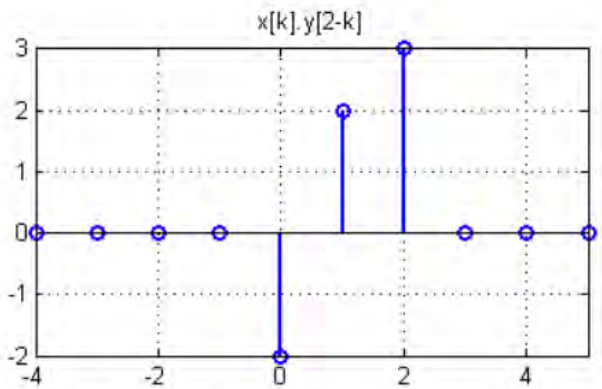
$n \le Rx+Ry \Rightarrow 0 \le n \le 5$

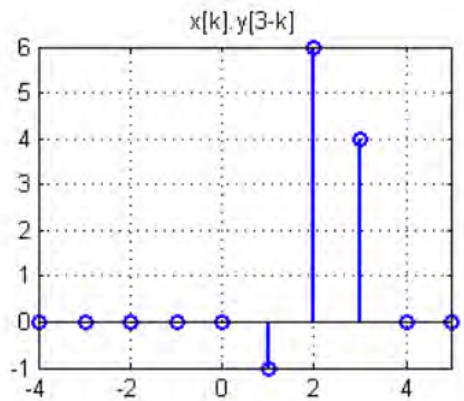


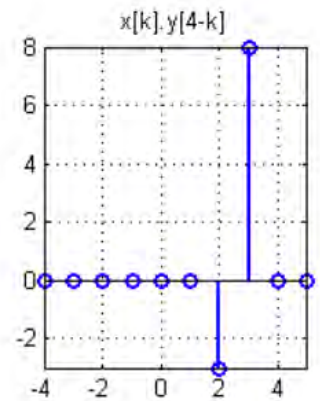

x[k].y[-1-k]

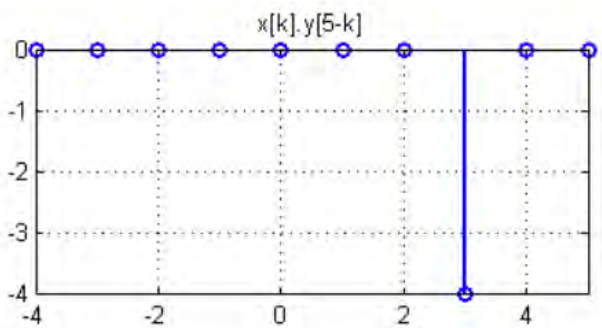

x[k].y[0-k]

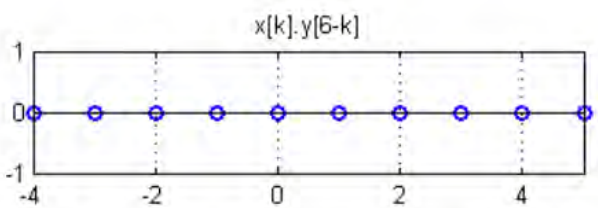

x[k].y[1-k]

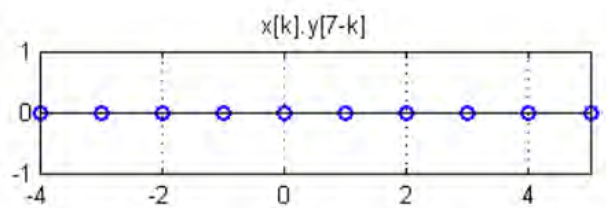

x[k].y[2-k]

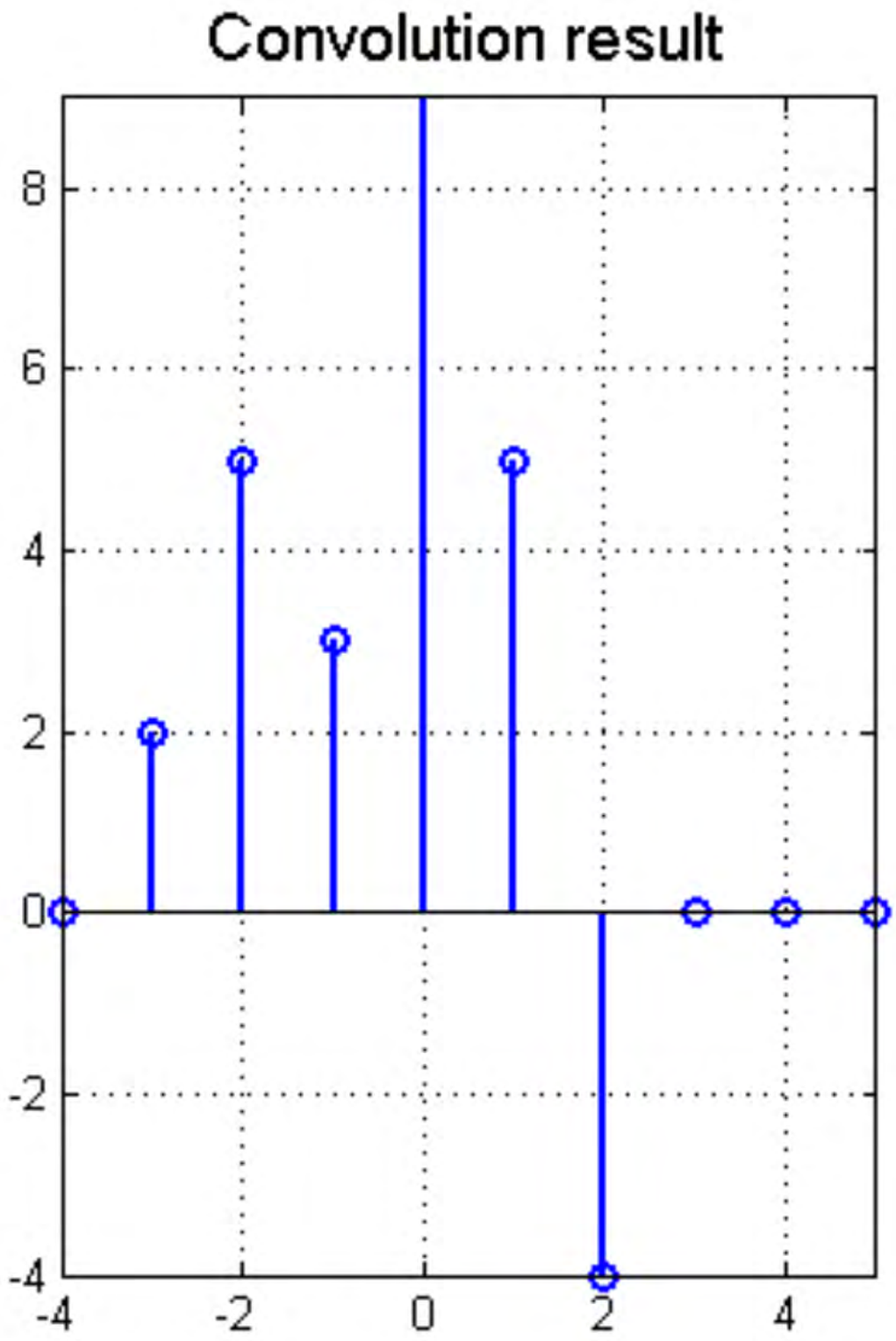

x[k].y[3-k]


x[k].y[4-k]


x[k].y[5-k]

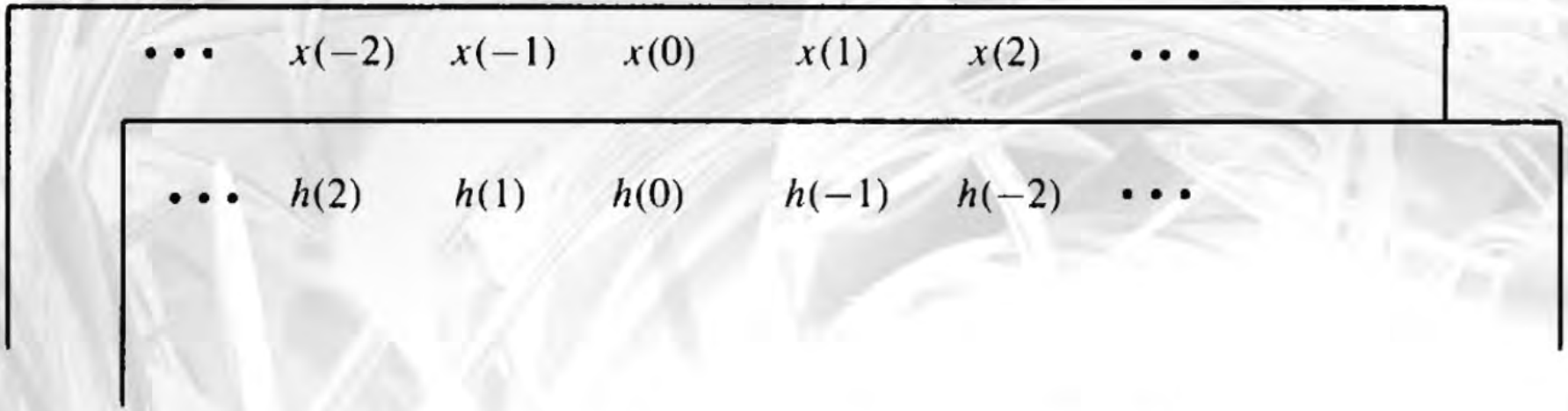

x[k].y[6-k]


x[k].y[7-k]


Convolution result
8
6
4
2
0
-2
-4
-4
-2
0
2
4

Συνέλιξη - παράδειγμα πεπερασμένου μήκους

Μέθοδος του κανόνα



1. ευθυγράμμιση του x[0] με το h[0], πολλαπλασιασμός
2. μετατόπιση προς τα δεξιά, πολλαπλασιασμός
3. μετατόπιση προς τα αριστερά, πολλαπλασιασμός
4. πρόσθεση όλων των ακολουθιών