Συστήματα διακριτού χρόνου
Discrete-time systems

Εισαγωγή στα διακριτά συστήματα ή συστήματα διακριτού χρόνου

$$y[n] = T\{x[n]\}$$

$$x[n] \xrightarrow{T} y[n]$$

Σύστημα διακριτού χρόνου

Discrete-time system

Ως σύστημα διακριτού χρόνου ή διακριτό σύστημα ορίζεται μαθηματικά ένας μεταστηματισμός ή τελεστής που απεικονίζει μια ακολουθία x[n] σε μια άλλη y[n]

$$y[n]=T\{x[n]\}$$

Απεικονίζεται σχηματικά ως:

Τρόποι απεικόνισης

μέσω του μετασχηματισμού/τελεστή

- Χρήση αλγεβρικών παραστάσεων

$$y[n] = x[n] \sin(2\pi n/32)$$

- Χρήση πινάκων αντιστοίχισης

x[n]	*y[n]*
4	1
2	-1
-1	2.4
Αλλιώς	0

- Χρήση "εντολών"

για x[n] με μήκος N, το y[n] αποτελείται από τις ταξινομημένες τιμές του x[n] σε αύξουσα σειρά (αλγόριθμος αύξουσας ταξινόμησης)

Το ιδεατό σύστημα καθυστέρησης

Ideal delay system

$$y[n]=x[n-k], \quad -\infty < n < \infty$$

k θετικός ακέραιος

Το σύστημα απλά μετατοπίζει την ακολουθία εισόδου προς τα δεξιά κατά k δείγματα

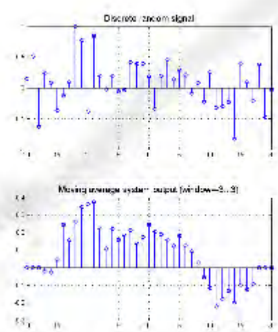
Το σύστημα κινητού μέσου όρου

Moving average system

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k] =$$

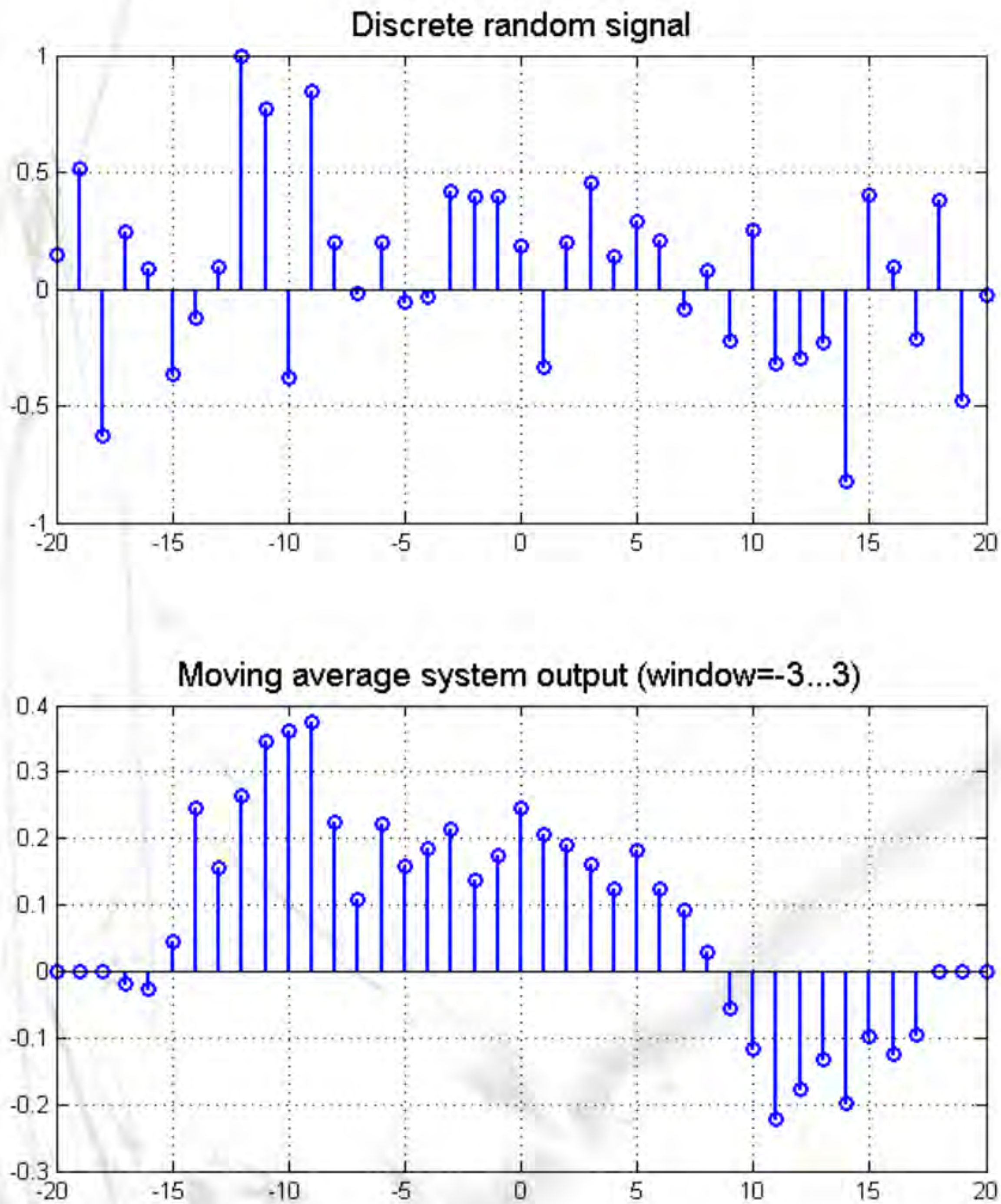
$$\frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \{x[n + M_1] + x[n + M_1 - 1] + \cdots + x[n] + \cdots + x[n - M_2]\}$$

κάθε n δείγμα εξόδου είναι ο μέσος όρος (M1+M2+1) δειγμάτων της εισόδου



Παράδειγμα τυχαίου σήματος και εξόδου συστήματος για M1=M2=3

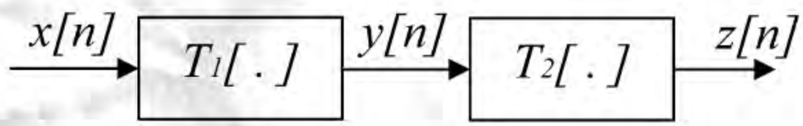
Παράδειγμα τυχαίου σήματος
και εξόδου συστήματος για M1=M2=3



Διασύνδεση συστημάτων

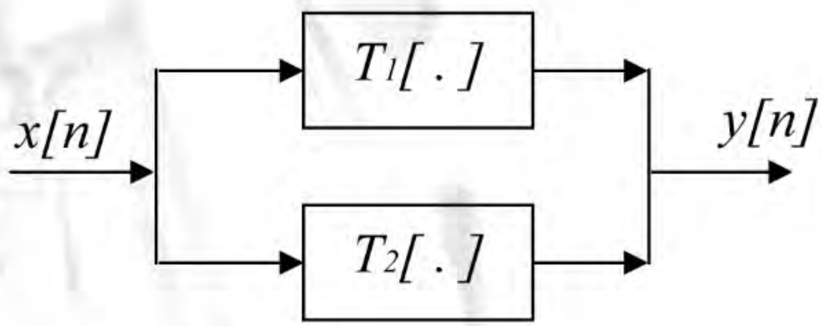
Σε σειρά

- Όταν η έξοδος ενός συστήματος αποτελεί την είσοδο ενός άλλου



Παράλληλα

- Όταν δύο συστήματα έχουν κοινή είσοδο και οι έξοδοί τους αθροίζονται



Μνήμη διακριτού συστήματος

Σύστημα χωρίς μνήμη

όταν για κάθε τιμή της ανεξάρτησης μεταβλητής n η έξοδος y[n] εξαρτάται μόνο από την αντίστοιχη είσοδο x[n]

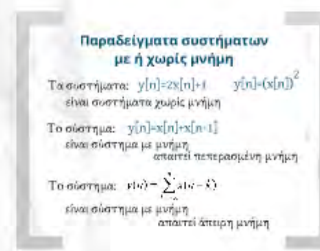
Σύστημα με μνήμη

όταν η έξοδος y[n] δεν εξαρτάται μόνο από την αντίστοιχη είσοδο x[n] για κάθε n


Παραδείγματα συστημάτων με ή χωρίς μνήμη

Το ιδεατό σύστημα καθυστέρησης: y[n]=x[n-k]
είναι σύστημα με μνήμη
απαιτεί πεπερασμένη μνήμη

Το σύστημα κινητού μέσου όρου:
[illegible]
είναι χωρίς μνήμη μόνο για M1=M2=0
απαιτεί πεπερασμένη μνήμη


Παραδείγματα συστημάτων με ή χωρίς μνήμη

Τα συστήματα: y[n]=2x[n]+1 y[n]=(x[n])^2
είναι συστήματα χωρίς μνήμη

Το σύστημα: y[n]=x[n]+x[n-1]
είναι σύστημα με μνήμη
απαιτεί πεπερασμένη μνήμη

Το σύστημα: [illegible]
είναι σύστημα με μνήμη
απαιτεί άπειρη μνήμη

Παραδείγματα συστήματων με ή χωρίς μνήμη

Το ιδεατό σύστημα καθυστέρησης: y[n]=x[n-k]

είναι σύστημα με μνήμη

απαιτεί πεπερασμένη μνήμη

Το σύστημα κινητού μέσου όρου:

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k] =$$
$$\frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \{x[n + M_1] + x[n + M_1 - 1] + \cdots + x[n] + \cdots + x[n - M_2]\}$$

είναι χωρίς μνήμη μόνο για M1=M2=0

απαιτεί πεπερασμένη μνήμη

Παραδείγματα συστήματων με ή χωρίς μνήμη

Τα συστήματα: $y[n]=2x[n]+1$ $y[n]=(x[n])^2$

είναι συστήματα χωρίς μνήμη

Το σύστημα: $y[n]=x[n]+x[n-1]$

είναι σύστημα με μνήμη

απαιτεί πεπερασμένη μνήμη

Το σύστημα: $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n} x(n-k)$

είναι σύστημα με μνήμη

απαιτεί άπειρη μνήμη

Αμεταβλητότητα κατά τη μετατόπιση
Shift Invariance

Αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση σύστημα

Time Invariant, Shift Invariant

σύστημα του οποίου η έξοδος εξαρτάται μόνο από το σήμα εισόδου και όχι από την χρονική στιγμή που αυτό εισήλθε στο σύστημα.

Αν η είσοδος x[n] καθυστερήσει κατά n0, τότε η έξοδος θα είναι η y[n] καθυστερημένη κατά n0

Έστω το σύστημα: y[n]=T{x[n]}
Ολίσθηση στην είσοδο σημαίνει: x[n-n0]

Εάν y[n-n0]=T{x[n-n0]} το σύστημα T[.] είναι χρονικά αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση

Παράδειγμα:

y[n]=K x[n] (ενισχυτής πλάτους με κέρδος K ακέραιο)
Μετατόπιση κατά n0: x[n] -> x[n-n0]
η αντίστοιχη έξοδος είναι: y[n]=T{x[n-n0]}=K x[n-n0]
μετατόπιση της εξόδου είναι: y[n-n0] = K x[n-n0]
άρα y[n-n0] = T{x[n-n0]}
Συνεπώς το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο

Παράδειγμα:

y[n]=K x[n] (όπου K εκθετική $0,9^{n}$)
Μετατόπιση κατά n0: x[n] -> x[n-n0]
με αντίστοιχη έξοδο: y[n] = T{x[n-n0]} = $0,9^{-n}$ x[n-n0]
μετατόπιση της εξόδου: y[n-n0] = $0,9^{-(n-n0)}$ x[n-n0]
άρα y[n-n0] ≠ T{x[n-n0]}
Συνεπώς το σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο

Παράδειγμα:

y[n]=x[Mn] (όπου M θετικός ακέραιος)
Μετατόπιση κατά n0: x[n] -> x[n-n0]
με αντίστοιχη έξοδο: y[n] = T(x[n-n0]) = x[Mn-n0]
μετατόπιση της εξόδου: y[n-n0] = x[M(n-n0)]
άρα y[n-n0] ≠ T{x[n-n0]}
Συνεπώς το σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο

Έστω το σύστημα: $y[n]=T\{x[n]\}$

Ολίσθηση στην είσοδο σημαίνει: $x[n-n0]$

Εάν $y[n-n0]=T\{x[n-n0]\}$ το σύστημα T[.] είναι χρονικά αμετάβλητο κατά τη μετατόπιση

Παράδειγμα:

$y[n]=K\,x[n]$ (ενισχυτής πλάτους με κέρδος K ακέραιο)

Μετατόπιση κατά n0: $x[n] \to x[n-n0]$

η αντίστοιχη έξοδος είναι: $y[n]=T\{x[n-n0]\}=K\,x[n-n0]$

μετατόπιση της εξόδου είναι: $y[n-n0] = K\,x[n-n0]$

άρα $y[n-n0] = T\{x[n-n0]\}$

Συνεπώς το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο

Παράδειγμα:

$y[n]=K\,x[n]$ (όπου K εκθετική $0{,}9^{-n}$)

Μετατόπιση κατά n0: $x[n] \rightarrow x[n-n0]$

με αντίστοιχη έξοδο: $y[n] = T\{x[n-n0]\} = 0{,}9^{-n}\,x[n-n0]$

μετατόπιση της εξόδου: $y[n-n0] = 0{,}9^{-[n-n0]}x[n-n0]$

άρα $y[n-n0] \neq T\{x[n-n0]\}$

Συνεπώς το σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο

Παράδειγμα:

$y[n]=x[Mn]$ (όπου M θετικός ακέραιος)

Μετατόπιση κατά n0: $x[n] \rightarrow x[n-n0]$

με αντίστοιχη έξοδο: $y[n] = T(x[n-n0]) = x[Mn-n0]$

μετατόπιση της εξόδου: $y[n-n0] = x[M(n-n0)]$

άρα $y[n-n0] \neq T\{x[n-n0]\}$

Συνεπώς το σύστημα δεν είναι χρονικά αμετάβλητο

Γραμμικότητα διακριτών συστημάτων
Linearity of discrete systems

Ένα σύστημα λέγεται γραμμικό (Linear) αν για αυτό ισχύουν οι ιδιότητες της ομογένειας και της επαλληλίας

- Η αρχή της ομογένειας ισχύει για ένα διακριτό σύστημα όταν ισχύει η ακόλουθη σχέση T{c x[n]} = c T{x[n]}

  όπου c είναι γενικά μιγαδική σταθερά
- Η αρχή της επαλληλίας ισχύει για ένα σύστημα όταν ισχύει η σχέση: T{x1[n]+x2[n]}=T{x1[n]}+T{x2[n]}

Η γραμμικότητα ενός συστήματος μπορεί να περιγραφεί με μία μαθηματική σχέση ως ακολούθως:

$$T[c_1 \cdot x_1(n) + c_2 \cdot x_2(n)] = c_1 \cdot T[x_1(n)] + c_2 \cdot T[x_2(n)]$$

Γραμμικότητα - παράδειγμα

Έστω το σύστημα: $y(n) = \frac{1}{2}[x(n) + x(n-1)]$

Το σύστημα έχει την ιδιότητα της ομογένειας:

$$T[c \cdot x(n)] = \frac{1}{2}[c \cdot x(n) + c \cdot x(n-1)]$$

$$c \cdot T[x(n)] = c \cdot \frac{1}{2}[x(n) + x(n-1)] = \frac{1}{2}[c \cdot x(n) + c \cdot x(n-1)]$$

Το σύστημα έχει την ιδιότητα της επαλληλίας:

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = \frac{1}{2}[x_1(n) + x_2(n) + x_1(n-1) + x_2(n-1)]$$

$$T[x_1(n)] + T[x_2(n)] = \frac{1}{2}[x_1(n) + x_1(n-1)] + \frac{1}{2}[x_2(n) + x_2(n-1)] =$$

$$\frac{1}{2}[x_1(n) + x_2(n) + x_1(n-1) + x_2(n-1)]$$

> Το σύστημα είναι γραμμικό

Γραμμικότητα - παράδειγμα

Έστω το σύστημα: $y(n) = x(n) + 1$

Το σύστημα δεν έχει την ιδιότητα της ομογένειας:

$$T[c \cdot x(n)] = c \cdot x(n) + 1$$

* το σύστημα προσθέτει 1 σε οποιαδήποτε είσοδο

$$c \cdot T[x(n)] = c \cdot [x(n) + 1)] = c \cdot x(n) + c$$

Το σύστημα δεν έχει την ιδιότητα της επαλληλίας:

$$T[x_1(n) + x_2(n)] = x_1(n) + x_2(n) + 1$$

$$T[x_1(n)] + T[x_2(n)] = x_1(n) + 1 + x_2(n) + 1 = x_1(n) + x_2(n) + 2$$

> Το σύστημα δεν είναι γραμμικό

Γραμμικότητα και αμεταβλητότητα στη μετατόπιση

Linearity & Shift Invariance

Ένα σύστημα της μορφής: $y(n)=\sum_{k=0}^{K} a_k \cdot x(n-k)$

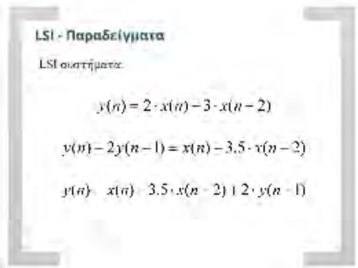
όπου α σταθερός όρος, είναι γραμμικό και αμετάβλητο στη μετατόπιση

- linear time invariant - LTI
- linear shift invariant - LSI

Επίσης τα παρακάτω συστήματα μπορεί να είναι LTI:

$$\sum_{\lambda=0}^{\Lambda} \beta_\lambda \cdot y(n-\lambda)=\sum_{k=0}^{K} a_k \cdot x(n-k)$$

$$y(n)=\sum_{k=0}^{K} a_k \cdot x(n-k)-\sum_{\lambda=1}^{\Lambda} \beta'_\lambda \cdot y(n-\lambda),\ \beta'_\lambda=\frac{\beta_\lambda}{\beta_0}$$


LSI - Παραδείγματα

LSI συστήματα:

$$y(n)=2\cdot x(n)-3\cdot x(n-2)$$

$$y(n)-2y(n-1)=x(n)-3.5\cdot x(n-2)$$

$$y(n)=x(n)-3.5\cdot x(n-2)+2\cdot y(n-1)$$

LSI - Παραδείγματα

LSI συστήματα:

$$y(n) = 2 \cdot x(n) - 3 \cdot x(n-2)$$

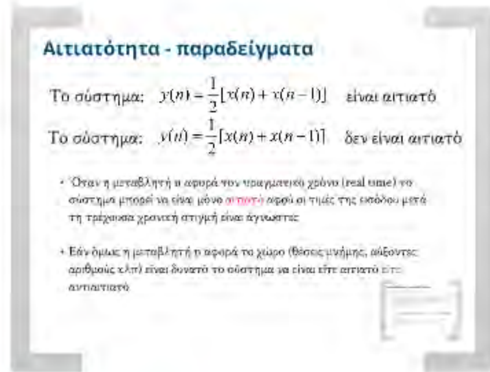
$$y(n) - 2y(n-1) = x(n) - 3.5 \cdot x(n-2)$$

$$y(n) = x(n) - 3.5 \cdot x(n-2) + 2 \cdot y(n-1)$$

Αιτιατότητα
Causality

Σύστημα όπου η τιμή της εξόδου y[n] εξαρτάται από την τιμή x[n] του σήματος εισόδου και προηγούμενές της τιμές x[n-k] (k φυσικός αριθμός)

- λέγεται αιτιατό (causal)
- n=n0 -> y[n] εξαρτάται από x[n≤n0]



Διαφορετικά το σύστημα λέγεται

- μη αιτιατό ή αντιαιτιατό

Τα αιτιατά συστήματα καλούνται προβλέψιμα

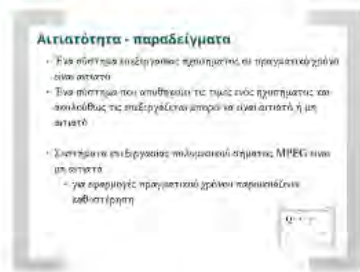
Αιτιατότητα - παραδείγματα

Το σύστημα: $y(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(n-1)]$ είναι αιτιατό

Το σύστημα: $y(n)=\frac{1}{2}[x(n)+x(n+1)]$ δεν είναι αιτιατό

- Όταν η μεταβλητή n αφορά τον πραγματικό χρόνο (real time) το σύστημα μπορεί να είναι μόνο αιτιατό αφού οι τιμές της εισόδου μετά τη τρέχουσα χρονική στιγμή είναι άγνωστες

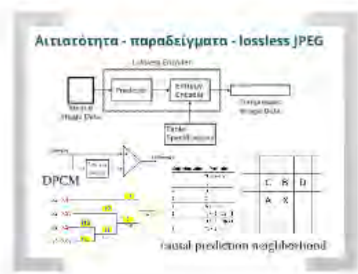
- Εάν όμως η μεταβλητή n αφορά το χώρο (θέσεις μνήμης, αύξοντες αριθμούς κλπ) είναι δυνατό το σύστημα να είναι είτε αιτιατό είτε αντιαιτιατό



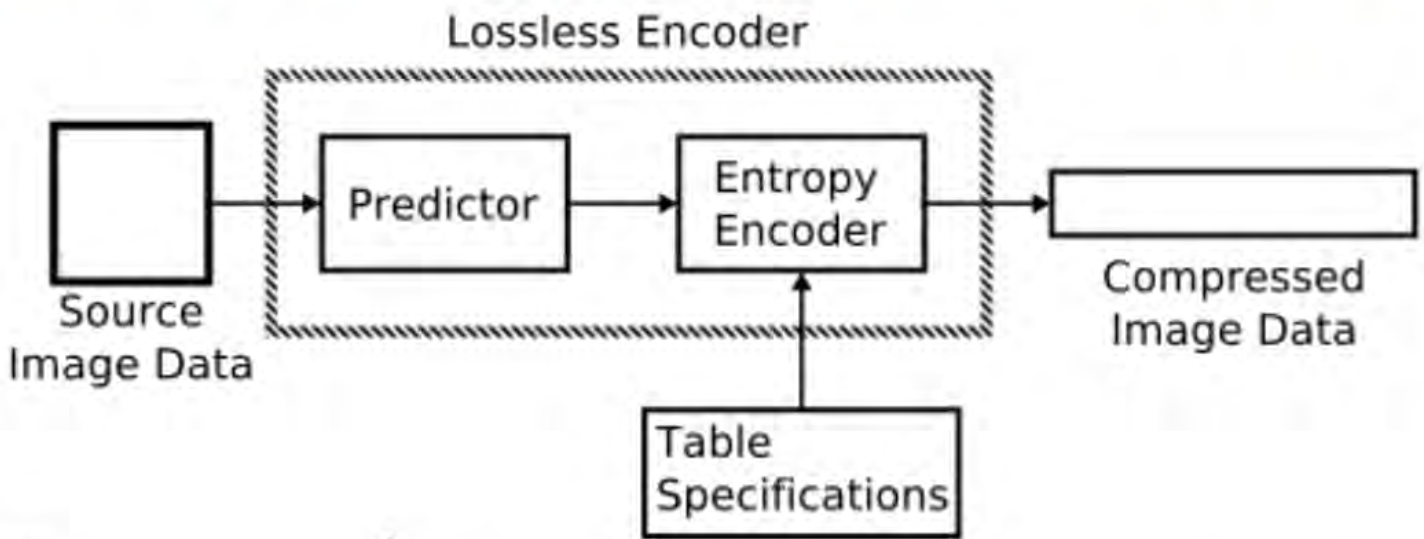
Αιτιατότητα - παραδείγματα

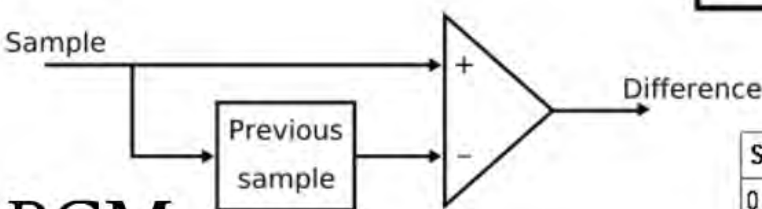
- Ένα σύστημα επεξεργασίας ηχοσήματος σε πραγματικό χρόνο είναι αιτιατό
- Ένα σύστημα που αποθηκεύει τις τιμές ενός ηχοσήματος και ακολούθως τις επεξεργάζεται μπορεί να είναι αιτιατό ή μη αιτιατό

- Συστήματα επεξεργασίας πολυμεσικού σήματος MPEG είναι μη αιτιατά
    - για εφαρμογές πραγματικού χρόνου παρουσιάζουν καθυστέρηση

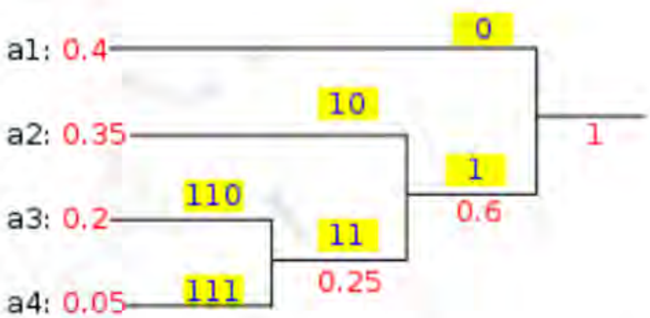


Αιτιατότητα - παραδείγματα - lossless JPEG

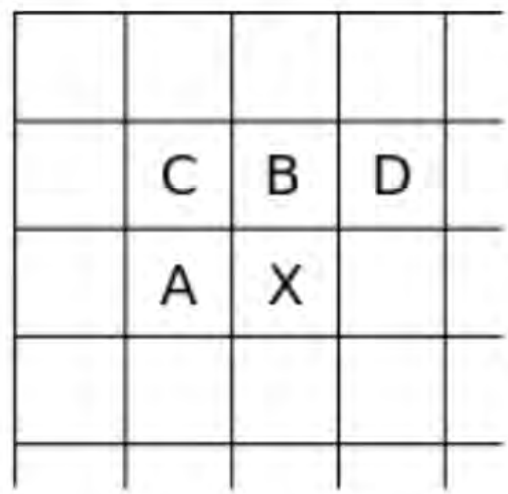




DPCM



Selection-value	Prediction
0	No prediction
1	A
2	B
3	C
4	A + B – C
5	A + (B – C)>>1
6	B + (A – C)>>1
7	(A + B)>>1



causal prediction neighborhood

Ευστάθεια
Stability

Ένα σύστημα λέγεται ότι είναι ευσταθές υπό την έννοια της φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου (bounded-input-bounded-output BIBO)

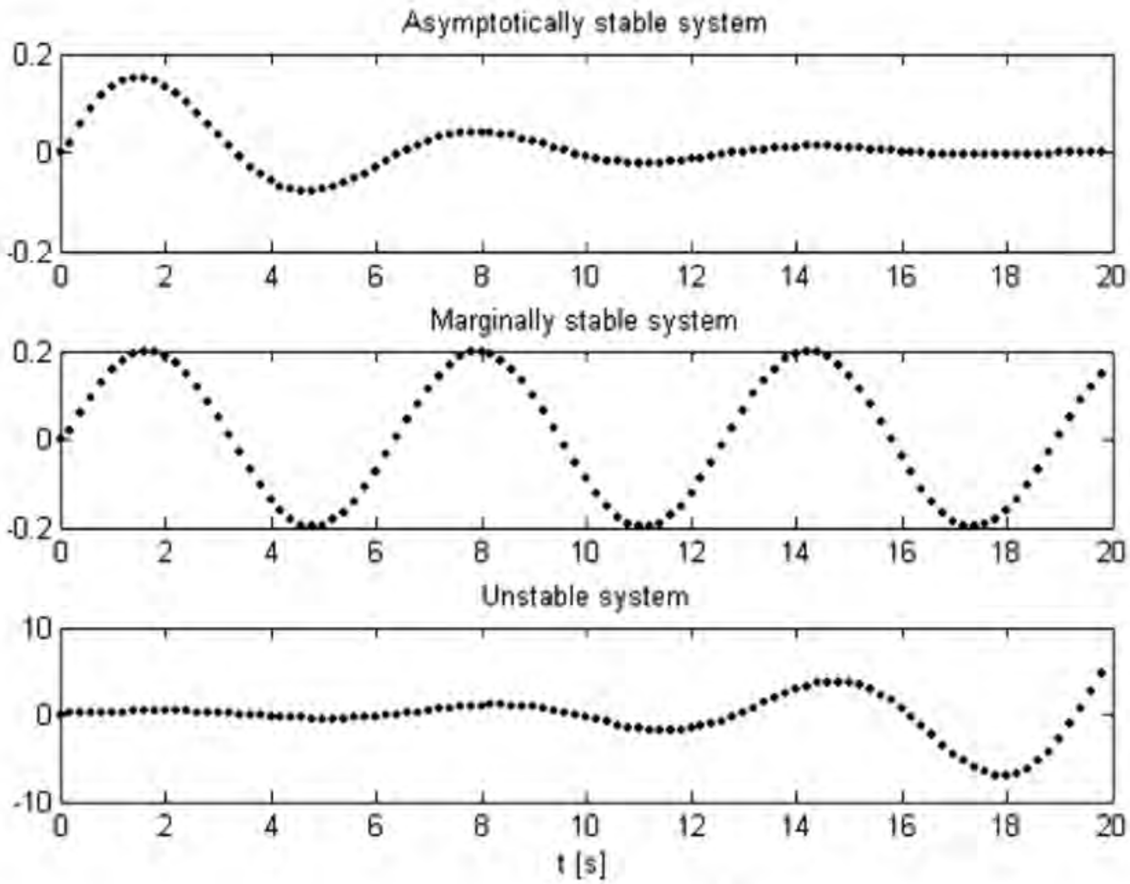
αν και μόνο αν

για οποιαδήποτε απολύτως φραγμένο σήμα εισόδου το σήμα εξόδου είναι και αυτό απολύτως φραγμένο

$$\exists B_1 \in R < \infty : \ |x[n]| \leq B_1 \Leftrightarrow \exists B_2 \in R < \infty : \ |y[n]| = |T\{x[n]\}| \leq B_2$$

Ανάλυση ευστάθειας

Ειδικό κεφάλαιο στη μελέτη συστημάτων διακριτού χρόνου



Ευστάθεια και αιτιατότητα

Stability and causality

Η ευστάθεια και η αιτιατότητα είναι απαιτήσεις που πρέπει να ικανοποιεί ένα γραμμικό σύστημα διακριτού χρόνου για να είναι υλοποιήσιμο και να έχει πρακτική αξία.

Αντιστρεψιμότητα
Reversibility

Ένα σύστημα λέγεται αντιστρέψιμο αν μπορεί να προσδιοριστεί μοναδικά το σήμα εισόδου από το σήμα εξόδου.

Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει να ισχύει η συνθήκη

$$y_1(n) \neq y_2(n) \Rightarrow x_1(n) \neq x_2(n)$$