Σήματα διακριτού χρόνου

Discrete time signals

Discrete time signals
Διακριτού χρόνου

- Διακριτό σήμα ή σήμα διακριτού χρόνου ονομάζουμε μία ακολουθία πραγματικών ή μιγαδικών τιμών $x[n]$, με $n \in Z$ και $x[n] \in C$
  - Το διακριτό σήμα είναι, δηλαδή, μία συνάρτηση, της οποίας η ανεξάρτητη μεταβλητή είναι ακέραιος αριθμός

Discrete values signals
Διακριτών τιμών

- Σήμα διακριτών τιμών είναι το σήμα που λαμβάνει διακριτές τιμές (ανεξάρτητα αν είναι διακριτού χρόνου ή όχι)

Digital signals
Ψηφιακό

- Ψηφιακό σήμα είναι το σήμα διακριτού χρόνου και διακριτών τιμών

Θεμελιώδη διακριτά σήματα

- Κρουστική ακολουθία
  Unit sample sequence
- Βηματική ακολουθία
  Unit step sequence
- Εκθετική ακολουθία
  Exponential sequence
- Ημιτονοειδής ακολουθία
  Sinusoid sequence

Γραφική παράσταση σημάτων διακριτού χρόνου

Εκθετική και ημιτονοειδής ακολουθία

Κρουστική και Βηματική ακολουθία

Η βηματική ακολουθία ως άθροισμα κρουστικών

(α). $u(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta(k)$

(β). $u(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(n-k)$

$\delta(n) = u(n) - u(n-1)$

Η κρουστική ακολουθία ως διαφορά βηματικών

Γενική περίπτωση

- Ανάλυση σε άθροισα κρουστικών

Αναπαράσταση τυχαίας ακολουθίας από γραμμικό συνδυασμό κρουστικών ακολουθιών με καθυστέρηση

$$x(n) = x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(-1)\delta(n+1) + \cdots = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Παράδειγμα

- Ανάλυση σε άθροισμα κρουστικών

$$x(n) = -2\delta(n+3) - \delta(n) + 3\delta(n-1) + 2\delta(n-3)$$

Γραμμικός συνδυασμός κρουστικών ακολουθιών

Διάρκεια διακριτού σήματος

- Πεπερασμένου μήκους αν οι τιμές του μηδενίζονται για κάθε τιμή του n που δεν ανήκει σε ένα πεπερασμένο διάστημα [L,R]:

$$x[n] = 0,\ \forall n \notin [L, R] \text{ και } L,R \in Z$$

  - Η έκταση N του διαστήματος [L,R] λέγεται μήκος του σήματος και είναι

$$N=R-L+1$$

- Σήματα που δεν είναι πεπερασμένου μήκους ονομάζονται απείρου μήκους.
  - Διακριτό σήμα απείρου μήκους λέγεται σήμα δεξιάς πλευράς αν ικανοποιεί τη σχέση $x[n] = 0, \forall n < L$ και αριστερής πλευράς αν $x[n] = 0, \forall n > R$
  - Αν ένα διακριτό σήμα απείρου μήκους δεν είναι δεξιάς ή αριστερής πλευράς λέγεται αμφίπλευρο

Από το άπειρο
...στο πεπερασμένο

Αν x[n] σήμα απείρου μήκους τότε μπορεί να ορισθεί το πεπερασμένου μήκος σήμα y[n] στο διάστημα [L,R] ως εξής

$$y[n] = x[n]\,[u(n-L) - u(n-R-1)]]$$

$$y[n] = x[n]\,[u(n-L)\,u(R-n)]$$

$x[n]=0.8^n$

$n=-\infty...\infty$

x

u[n-L]

-

u[n-R-1]

=

=

$y[n]=0.8^n$

$n=-10...10$

> δεύτερη μέθοδος;

Από το άπειρο
...στο πεπερασμένο

Αν x[n] σήμα απείρου μήκους τότε το σήμα y[n] = x[n] u[n] είναι δεξιάς πλευράς με y[n] = 0,∀n < 0

x

> πώς δημιουργούμε το σήμα αριστερής πλευράς;

Περιοδικότητα διακριτού σήματος

Ένα σήμα λέγεται περιοδικό αν υπάρχει θετικός ακέραιος N ώστε

$$x[n] = x[n + N]$$

Ο ακέραιος N λέγεται περίοδος του σήματος

- αν N η περίοδος του σήματος, τότε οι 2N, 3N, ... κάθε θετικό ακέραιο πολλαπλάσιο του N είναι περίοδοι του σήματος
- η μικρότερη τιμή της περιόδου ονομάζεται πρωτεύουσα περίοδος

Αν δεν υπάρχει θετικός ακέραιος N ώστε να ισχύει η σχέση περιοδικότητας, το σήμα λέγεται μη περιοδικό

Εξέταση περιοδικότητας

Να εξεταστεί εάν το σήμα x[n] είναι περιοδικό:

$$x(n) = A\cos\left(\frac{3\pi}{7}n - \frac{\pi}{8}\right)$$

Το σήμα είναι περιοδικό μόνο εάν υπάρχει N θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε: x[n]=x[n+N]

Το σήμα x[n+N] είναι: $x(n+N) = A\cos\left(\frac{3\pi}{7}n + \frac{3\pi}{7}N - \frac{\pi}{8}\right)$

Άρα x[n]=x[n+N] εάν $\frac{3\pi}{7}N$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π

Η μικρότερη τιμή του N για την οποία ισχύει είναι N=14

(3π/7 N=k 2π => N=14 k/3 => επειδή N ακ. k=3 => N=14)

Συνεπώς το σήμα είναι περιοδικό με περίοδο 14

Εξέταση περιοδικότητας

Να εξεταστεί εάν το σήμα x[n] είναι περιοδικό:

$$x(n) = e^{j(n/8 - \pi)}$$

Το σήμα είναι περιοδικό μόνο εάν υπάρχει N θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε: x[n]=x[n+N]

Το σήμα x[n+N] είναι:

$$x(n+N) = e^{j(\frac{n}{8} + \frac{N}{8} - \pi)}$$

$$= e^{j(\frac{n}{8} - \pi)} \, e^{j\frac{N}{8}}$$

$$= x(n) \, e^{j\frac{N}{8}}$$

Άρα x[n]=x[n+N] εάν $\frac{N}{8}$ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π

(για να είναι $e^{j\frac{N}{8}}=1$)

Το σήμα δεν είναι περιοδικό

(N/8=k 2π (k ακέρ.) => N=16 kπ => N δεν είναι ακέρ. = άτοπο)

> Να εξεταστεί η περιοδικότητα του x[n]=cos[2πn/5]

Συμμετρία διακριτού σήματος

Ένα πραγματικό διακριτό σήμα x(n) λέγεται άρτιο αν ισχύει η σχέση $x[-n] = x[n], \forall n \in Z$

Ένα πραγματικό διακριτό σήμα x(n) λέγεται περιττό αν ισχύει η σχέση $x[-n] = -x[n], \forall n \in Z$

Συμμετρία

Κάθε πραγματικό σήμα μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα ενός άρτιου και ενός περιττού σήματος.

Αν x1[n] άρτιο και x2[n] περιττό θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις

x[n]=x1[n]+x2[n] (1)

x[-n]=x1[-n]+x2[-n]=> x[-n]=x1[n]-x2[n] (2)

Άρα:

(1)+(2) => x1[n] = (x[n]+x[-n]) / 2

(1)-(2) => x2[n] = (x[n]-x[-n]) / 2

Σε μιγαδικά διακριτά σήματα:

Αν x[n]=x*[n] καλείται συζυγές συμμετρικό

Αν x[n]=-x*[n] καλείται συζυγές αντισυμμετρικό

> Να εξεταστεί η συμμετρία των βασικών τριγωνομετρικών ακολουθιών

cos[n], sin[n]

> Να εξεταστεί η συμμετρία της n^3

Συμμετρία - Ιδιότητες

- Το άθροισμα
  - δύο άρτιων είναι άρτια και δύο περιττών περιττή
- Το γινόμενο
  - δύο άρτιων ή δύο περιττών είναι άρτια
  - μιας άρτιας με μια περιττή είναι περιττή
- Το πηλίκο
  - δύο άρτιων είναι άρτια και δύο περιττών περιττή
  - μιας άρτιας με μια περιττή είναι περιττή
- Η παράγωγος (εξισώσεις διαφορών)
  - άρτιας είναι περιττή
  - μιας περιττής είναι άρτια
- Η σύνθεση
  - άρτιων είναι άρτια και περιττών είναι περιττή
  - άρτιας με περιττή είναι άρτια
  - κάθε ακολουθίας με άρτια είναι άρτια
- Το ολοκλήρωμα (αθροίσματα)
  - περιττής στο −A ως +A είναι μηδέν (*)
  - άρτιας στο −A ως +A είναι διπλάσιο του ολοκληρώματος το 0 ως +A (*)

Η μοναδική ακολουθία που έχει και άρτια και περιττή συμμετρία είναι η σταθερά $x[n] = 0$

Αντιστροφή, ολίσθηση, κλιμάκωση

Εάν σε σήμα x[n] εφαρμοσθεί μετασχηματισμός στην ανεξάρτητη μεταβλητή n, f [n] : Z → Z, προκύπτει το x[f[n]]

- Αντιστροφή αν f[n]=-n → y[n]=x[-n]
- Μετατόπιση ή ολίσθηση κατά k αν f[n]=n-k → y[n]= x[n-k]
- Κλιμάκωση αν
  - f[n]=Mn, υποδειγματοληψία → y[n]= x[Mn]
  - f[n]=n/M, υπερδειγματοληψία → y[n]= x[n/M]
  - M ακέραιος

1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-25
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
25

Αντιστροφή

1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-25
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15
20
25

Μετατόπιση κατά 5

Υποδειγματοληψία (ήμισυ)

Υπερδειγματοληψία (διπλάσια)

Αντιστροφή, ολίσθηση, κλιμάκωση

Εάν σε σήμα x[n] εφαρμοσθεί μετασχηματισμός στην ανεξάρτητη μεταβλητή n, f [n] : Z → Z, προκύπτει το x[f[n]]

- Αντιστροφή αν f[n]=-n → y[n]=x[-n]
- Μετατόπιση ή ολίσθηση κατά k αν f[n]=n-k → y[n]= x[n-k]
- Κλιμάκωση αν
  - f[n]=Mn, υποδειγματοληψία → y[n]= x[Mn]
  - f[n]=n/M, υπερδειγματοληψία → y[n]= x[n/M]
  - M ακέραιος

Πράξεις διακριτών σημάτων

Μεταξύ ακολουθιών δύο διακριτών σημάτων μπορούν να εκτελεστούν οι βασικές πράξεις (+, -, *, :)

- μεταξύ των τιμών τους που αντιστοιχούν στην ίδια τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής n
- προκύπτει νέα ακολουθία (διακριτό σήμα)

- Πρόσθεση: $x[n]+ y[n]:: z[k] = x[k]+y[k]$
- Αφαίρεση: $x[n]- y[n]:: z[k] = x[k]-y[k]$
- Πολλαπλασιασμός: $x[n]y[n]:: z[k] = x[k]y[k]$
- Διαίρεση: $x[n]/y[n]:: z[k] = x[k]/y[k]$ $(y[n] \neq 0, \forall n)$

Ανάλυση με κρουστικές ακολουθίες

Η διακριτή ώση δ[n] μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή ενός διακριτού σήματος σύμφωνα με τη σχέση

$$\mathbf{x(n)} = \sum_{\mathbf{k}=-\infty}^{\infty} \mathbf{x(k)} \cdot \delta(\mathbf{n-k}) =$$
$$\cdots \mathbf{x}(-2) \cdot \delta(\mathbf{n}+2) + \mathbf{x}(-1) \cdot \delta(\mathbf{n}+1)$$
$$+ \mathbf{x(0)} \cdot \delta(\mathbf{n}) + \mathbf{x}(-1) \cdot \delta(\mathbf{n-1}) + \mathbf{x}(-2) \cdot \delta(\mathbf{n-2}) + \cdots$$

Διανυσματική ερμηνεία των διακριτών σημάτων και της κρουστικής ώσης

Έστω το πεπερασμένου μήκους σήμα x[n] με μήκος N=3, n=0,1,2 και τη διανυσματική περιγραφή του με τον πίνακα στήλης

$$\mathbf{x}=[\mathbf{x}(0), \mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2)]^{\mathbf{T}}$$

Σύμφωνα με το γενικό τύπο:

$$\mathbf{x(n)} = \sum_{\mathbf{k}=0}^{2} \mathbf{x(k)} \cdot \delta(\mathbf{n-k}) = \mathbf{x(0)} \cdot \delta(\mathbf{n}) + \mathbf{x(1)} \cdot \delta(\mathbf{n-1}) + \mathbf{x(2)} \cdot \delta(\mathbf{n-2})$$

Για n=0,1,2 οι δ[n], δ[n-1], δ[n-2] αντίστοιχα περιγράφονται διανυσματικά από τους πίνακες στήλης ως εξής:

$$\delta(\mathbf{n}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{n=0} \\ 0 & \mathbf{n=1} \\ 0 & \mathbf{n=2} \end{cases}, \quad \text{ήτοι διανυσματικά } \boldsymbol{\delta}_0=[1.0.0]^{\mathbf{T}}$$

$$\delta(\mathbf{n-1}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{n=0} \\ 1 & \mathbf{n=1} \\ 0 & \mathbf{n=2} \end{cases}, \text{ ήτοι διανυσματικά } \boldsymbol{\delta}_1=[0.1.0]^{\mathbf{T}}$$

$$\delta(\mathbf{n-2}) = \begin{cases} 0 & \mathbf{n=0} \\ 0 & \mathbf{n=1} \\ 1 & \mathbf{n=2} \end{cases}, \text{ ήτοι διανυσματικά } \boldsymbol{\delta}_2=[0.0.1]^{\mathbf{T}}$$

Οπότε προκύπτει η εξής γραφή:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x(0) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x(1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x(2) = \boldsymbol{\delta}_0 \cdot x(0) + \boldsymbol{\delta}_1 \cdot x(1) + \boldsymbol{\delta}_2 \cdot x(2) \Rightarrow$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_0 & \boldsymbol{\delta}_1 & \boldsymbol{\delta}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \end{bmatrix} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{x}$$

Ανάλυση με κρουστικές ακολουθίες

Η διακριτή ώση δ[n] μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την περιγραφή ενός διακριτού σήματος σύμφωνα με τη σχέση

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \cdot \delta(n-k) =$$
$$\cdots x(-2) \cdot \delta(n+2) + x(-1) \cdot \delta(n+1)$$
$$+ x(0) \cdot \delta(n) + x(-1) \cdot \delta(n-1) + x(-2) \cdot \delta(n-2) + \cdots$$

Διανυσματική ερμηνεία των διακριτών σημάτων και της κρουστικής ώσης

Έστω το πεπερασμένου μήκους σήμα x[n] με μήκος N=3, n=0,1,2

$$\cdots x(-2)\cdot\delta(n+2)+x(-1)\cdot\delta(n+1)$$
$$+x(0)\cdot\delta(n)+x(-1)\cdot\delta(n-1)+x(-2)\cdot\delta(n-2)+\cdots$$

Διανυσματική ερμηνεία των διακριτών σημάτων και της κρουστικής ώσης

Έστω το πεπερασμένου μήκους σήμα x[n] με μήκος N=3, n=0,1,2 και τη διανυσματική περιγραφή του με τον πίνακα στήλης

$$\mathbf{x}=[x(0),\ x(1),\ x(2)]^T$$

Σύμφωνα με το γενικό τύπο:

$$x(n)=\sum_{k=0}^{2}x(k)\cdot\delta(n-k)=x(0)\cdot\delta(n)+x(1)\cdot\delta(n-1)+x(2)\cdot\delta(n-2)$$

Για n=0,1,2 οι δ[n], δ[n-1], δ[n-2] αντίστοιχα περιγράφονται διανυσματικά από τους πίνακες στήλης ως εξής:

$$\delta(n)=\begin{cases}1 & n=0\\ 0 & n=1\end{cases},\quad \text{ήτοι διανυσματικά } \boldsymbol{\delta}_0=[1,0,0]^T$$

Για n=0,1,2 οι δ[n], δ[n-1], δ[n-2] αντίστοιχα περιγράφονται διανυσματικά από τους πίνακες στήλης ως εξής:

$$\delta(\mathbf{n}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{n} = 0 \\ 0 & \mathbf{n} = 1 \\ 0 & \mathbf{n} = 2 \end{cases}, \quad \text{ήτοι διανυσματικά } \boldsymbol{\delta}_0 = [1.0.0]^T$$

$$\delta(\mathbf{n}-1) = \begin{cases} 0 & \mathbf{n} = 0 \\ 1 & \mathbf{n} = 1 \\ 0 & \mathbf{n} = 2 \end{cases}, \text{ ήτοι διανυσματικά } \boldsymbol{\delta}_1 = [0.1.0]^T$$

$$\delta(\mathbf{n}-2) = \begin{cases} 0 & \mathbf{n} = 0 \\ 0 & \mathbf{n} = 1 \\ 1 & \mathbf{n} = 2 \end{cases}, \text{ ήτοι διανυσματικά } \boldsymbol{\delta}_2 = [0.0.1]^T$$

Οπότε προκύπτει η εξής γραφή:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x(0) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x(1) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot x(2) = \boldsymbol{\delta}_0 \cdot x(0) + \boldsymbol{\delta}_1 \cdot x(1) + \boldsymbol{\delta}_2 \cdot x(2) \Rightarrow$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}_0 & \boldsymbol{\delta}_1 & \boldsymbol{\delta}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \end{bmatrix} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{x}$$

Διανυσματική ερμηνεία

Θεωρώντας τα δ0, δ1, δ2 ως τα μοναδιαία διανύσματα στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο (E^3), το πεπερασμένο διακριτό σήμα x[n] με μήκος N=3 αναπαρίσταται από το διάνυσμα x ως εξής:

Λς σημειωθεί ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m-k)\cdot\delta(n-k) = \boldsymbol{\delta}_m^T\cdot\boldsymbol{\delta}_n = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad m=n \\ 0 & \text{αν} \quad m\neq n \end{cases}$$

δηλαδή οι κρουστικές διακριτές ώστε ως διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους με μέτρο μονάδα.
Αποτελούν δηλαδή μία ορθοκανονική βάση.

Οι συντεταγμένες του διανύσματος είναι οι προβολές του στα μοναδιαία διανύσματα δ0, δ1, δ2 και δίνονται από τις σχέσεις του εσωτερικού του γινομένου με αυτά ως εξής:

$$x(0) = \boldsymbol{\delta}_0^T\cdot\mathbf{x} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x(0)\\ x(1)\\ x(2)\end{bmatrix} = 1\cdot x(0)+0\cdot x(1)+0\cdot x(2) = \sum_{k=0}^{2}\delta(k)\cdot x(k)$$

$$x(1) = \boldsymbol{\delta}_1^T\cdot\mathbf{x} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x(0)\\ x(1)\\ x(2)\end{bmatrix} = 0\cdot x(0)+1\cdot x(1)+0\cdot x(2) = \sum_{k=0}^{2}\delta(1-k)\cdot x(k)$$

$$x(2) = \boldsymbol{\delta}_2^T\cdot\mathbf{x} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x(0)\\ x(1)\\ x(2)\end{bmatrix} = 0\cdot x(0)+0\cdot x(1)+1\cdot x(2) = \sum_{k=0}^{2}\delta(2-k)\cdot x(k)$$

και γενικά για n=0,1,2

$$x(n) = \boldsymbol{\delta}_n^T\cdot\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{2}\delta(n-k)\cdot x(k) =$$

$$= \delta(n)\cdot x(0)+\delta(n-1)\cdot x(1)+\delta(n-2)\cdot x(2)$$

x[k]
δ[k]
x[n]
x[2]
x[n]
x[1]
δ[2]
δ[1]
δ[0]
x[0]
axis-2
axis-0
axis-1
8
6
4
2
0
-1
0
1
2
3
4
5
-1
0
1
2
3
4
5
6

Ας σημειωθεί ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(m-k)\cdot\delta(n-k) = \boldsymbol{\delta}_m^T \cdot \boldsymbol{\delta}_n = \begin{cases} 1 & \text{αν} \quad m = n \\ 0 & \text{αν} \quad m \neq n \end{cases}$$

δηλαδή οι κρουστικές διακριτές ώσεις ως διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους με μέτρο μονάδα.
Αποτελούν δηλαδή μία ορθοκανονική βάση.